# CORSO

DI

# ANALISI ALGEBRICA

ELEMENTARE, E SUBLIME

VOLUME I.

---

L' ANALISI DELLE QUANTITA' DETERMINATE

---

# ANALISI ALGEBRICA

DELLE

# QUANTITA' DETERMINATE

DEL

**CAV. V. FLAUTI**

Professore di Analisi sublime nella R. Università degli studj di Napoli, e membro della *giunta* di pubblica istruzione pel Regno — Segretario della R. Accademia delle scienze, socio ordinario del R. Istituto d' Incoraggiamento, e della *Pontaniana*; onorario delle Accademie di Berlino, Copenaghen, Modena, ec. ec.

QUINTA EDIZIONE

*interamente riveduta, ed accresciuta dall' autore.*

**IN NAPOLI**

*Nella stamperia privata dell' autore.*

1844.

# PRELIMINARE

ALL'

# ANALISI ALGEBRICA

Le ricerche in Aritmetica di Pitagora e della sua scuola dimostrano, che questa scienza non cominciò allora ad esser coltivata; ma che già prima altri se ne occuparono: e forse con le altre dottrine ancor queste Pitagora raccolse dagli egizj. Conviene però riflettere, che la maggior parte delle investigazioni de'Pitagorici non furono dirette all'aumento della scienza Aritmetica; ma ad astratte considerazioni sulle proprietà di taluni numeri, dalle quali nulla di vantaggio traeva quella [1]; che però ragionevolmente il tempo non le ha tutte rispettate; e la posterità anche le rimaste ha tenute in pochissimo conto. Ma le ricerche anche oziose di grandi uomini rare volte rimangono a dirittura sterili; e quelle de' Pitagorici, di cui abbiamo fin ora detto, somministrarono ampia materia a' problemi aritmetici: ed anche la Geometria ne risentì grandissimi vantaggi; poichè la ricerca di due numeri quadrati

[1] Telauge figlio di Pitagora compose quattro libri sul *quaternario*, Archita scrisse un intero trattato sul numero 10, ed altri in simili ricerche sulle *virtù* de' numeri impiegarono il loro tempo, non escluso il divino Platone.

da' quali insieme presi risultasse anche un quadrato, diede occasione, e fu l'origine della celebratissima proprietà del triangolo rettangolo; che però essa ritiene ancora il nome di Pitagora, al quale è dovuta. Intanto è da credersi, che la parte aritmetica di pura calcolazione non fosse stata da quella scuola in poi interamente trascurata [2], se riguardisi a' progressi, che le scienze cui essa è ausiliaria fecero nella scuola di Platone, ed allo stato dell' Astronomia a quell' epoca; e più di tutto al grado cui essa pervenne a' tempi di Archimede e di Eratostene [3]: giacchè in genere di scienze, e particolarmente per le così dette *esatte*, le nuove scoperte sono sempre figlie di una genesi progressiva, che però, come altra volta dissi [4], è impossibile conoscere la prima origine di esse. Finalmente, argomentando sempre de' progressi dell' Aritmetica dagli usi cui essa veniva adattata, sarebbero mancati ad Ipparco e Tolomeo i mezzi per le loro scoperte in Astronomia: nè questi avrebbe potuto calcolar, come fece, le sue famose tavole delle corde degli archi di cerchio,

—

[2] Che in tale scuola si fosse ancor coltivato ciò che volgarmente dicesi *abbaco*, ne dà manifesto indizio la *tavola* per la moltiplicazione de' numeri semplici, che conosciamo ancora col nome di *pitagorica*.

[3] Archimede diede un esempio mirabilissimo della virtù dell'Aritmetica a' suoi tempi, nella difficil ricerca della *quadratura del cerchio* e nel suo *Psammite*, che presenta con sorpresa lo sforzo più grande della scienza aritmetica a quel tempo; e di Eratostene abbiamo ancora il metodo indiretto per rinvenire i numeri *primi*, conosciuto col nome di *crivello di Eratostene*.

[4] Nel discorso preliminare agli *Elementi di Euclide*.

che dovevano poi essere il fondamento della Trigonometria, della Geodesia, e dell' Astronomia.

Questi progressi successivi dell' Aritmetica dovettero insensibilmente condurre ad indagini generali su i numeri : nè i libri VII, VIII, e IX degli *Elementi* di Euclide dobbiamo altrimenti considerare aver ricevuta la loro origine; nè a quell'epoca sì gloriosa per le Matematiche dobbiamo credere, che que'nostri maestri si fossero introdotti allo studio elementare di tale scienza, senza che ve ne fosse bisogno. Ma pure queste loro considerazioni erano ben diverse da quelle altre, che si dovettero fare in seguito per la soluzione de'problemi aritmetici, e che costituirono a poco a poco una nuova scienza di calcolo, che prese poi il nome di *Algebra* [5].

L'origine dell' *Algebra* è ugualmente oscura che quella di tutte le scienze umane ; e la prima opera che ne abbiamo per mano di Diofanto [6] la mostra già abbastanza avanzata, senza che sapessimo i gradi di conoscenza in essa che si erano prima sormontati, per giugnere a quel segno. E possiamo solamente stabilire, per valercene in appresso, che all'epoca di Diofanto già si erano introdotte le particolari ma-

[5] Veggasi circa l' original significato, ed uficio di *Algebra* il cap. II. dell' egregia opera del Cossali : *Origine, trasporto in Italia . . . . dell' Algebra*.

[6] L' epoca in cui visse Diofanto, secondo argomenta il Bacheto, nella lettera premessa alla versione ch' egli diede de' sei primi libri superstiti da' tredici che quel matematico greco ne compose, può fissarsi all' incirca il terzo secolo della nostra Era.

niere per esprimere le potenze; e si marcava con un segno la sottrazione: e che ne' suoi libri *Aritmeticorum* si scorge evidentemente il maneggio delle equazioni di secondo grado[7]. È veramente stata gran perdita per la scienza quella di alcuni di tali libri di questo matematico di Alessandria, e di un' altra opera sulla pratica dell' Aritmetica, di cui parla Teone[8]: poichè da esse non solamente altro numero di maggiori cognizioni si sarebbe raccolto; ma avremmo ancora tratto gran lume per la storia di questa scienza, di cui, dopo Diofanto, altro non abbiamo, nella scuola greca di Alessandria, che poco dopo finì con la distruzione della celebre biblioteca, in cui la potenza di tanti re protettori delle scienze aveva raccolto il fiore del greco sapere[9].

Passate le scienze da' greci insieme colla dominazione in mano degli arabi; questi fecero tutti i lo-

—

[7] Si riscontri il cap. IV. vol. I dell' opera del Cossali.

[8] *Comment. in Almag.* lib. V.

[9] Le scienze, e specialmente la Geometria, che avevano avuta un tempo la loro culla in Egitto, divenute adulte in Grecia, ritornarono a mostrarsi nel loro clima natale, per opera de' re Tolomei, che successivamente il governarono; i quali vi chiamarono, ed accolsero i più distinti matematici, da formarvi una scuola celeberrima, che fu assai utile a tali scienze, nella quale figurò da prima Euclide, e vi si produssero a mano a mano Eratosteno, Apollonio, Pappo, Diofanto, Teone ed Ipazia sua figlia, e tanti altri. E que' sovrani benemeriti delle scienze vi fecero acquisto di tanta copia di opere in Grecia prodotte, da comporre la più famosa biblioteca che nell' antichità si riconosca, la quale con grave danno dello scienze fu poi distrutta nel VII° secolo dall'incursione barbarica de' saraceni; di che non v' ha storia dell' umano sapere, che ancor non si dolga.

ro sforzi per rimediare al mal fatto, traducendo, comentando, e riproducendo ciò che de' greci maestri fu loro possibile raccogliere; e l' Aritmetica, e la Geometria fu da essi grandemente coltivata e promossa. Per la prima di tali scienze n' è irrefragabile testimonio l' ingegnoso sistema di numerazione che noi usiamo, e che da loro abbiamo tratto; quantunque solide ragioni, somministrateci dagli stessi autori arabi, ci facciano credere averlo essi ricavato dagl' indiani [10]. E che presso questi fosse già molto innanzi una tale scienza lo mostra chiaramente la dimanda fatta da Sessa figlio di Daher, inventore del *giuoco degli scacchi*, ad un re indiano cui lo presentò, dalla quale si rileva, che già la dottrina delle progressioni geometriche aveva molto progredito[11]. Ma usciamo una volta da questo denso bujo, che la storia dell' Arimetica e dell' Algebra presso le antiche nazioni indiana, greca ed araba ci presenta, e cerchiamo più chiaro giorno in tempi a noi più prossimi, e che maggiormente debbono interessarci, passando a quell'epoca in cui dagli arabi fu trasportata tale scienza nelle nostre regioni, dalla quale definitivamente intendiamo cominciare questo saggio storico dell' Algebra.

Nel risorger le scienze, cominciando in Italia, dopo il *mille*, annunziarono fin da principio quel-

[10] Montucla - *Hist. des Math.* part. II. lib. I. n. VIII.

[11] Veggasi la storia di questa invenzione nel vol. I. pag. 380 ediz. 2. della *Hist. des Math.* del Montucla.

lo che diverrebbero in seguito in mano di una nazione di uomini dotati di fervido ingegno, e di grandissimo desiderio di far nuovamente rifulgere la loro antica grandezza. Lionardo denominato *Bonacci* dal nome del padre, e più comunemente cognominato *Pisano* dalla sua patria, al cominciar del XIII° secolo [12], di ritorno dalle sue peregrinazioni in oriente, ove aveva appresa l' arte dell'Algebra, ne diffuse la dottrina in Italia, e rese pubblico il suo *libro di Aritmetica*, ove giunse fino al maneggio delle equazioni di *primo* e *secondo grado*. Nè certamente altri prima di lui apparisce aver ciò fatto, come con tanti *forse*, preso da amor nazionale, ha stiracchiando dubitato l' ab. Andres [13], pretendendo che prima di Lionardo si fosse adoperato a farla conoscere nelle Spagne un tal *Giuseppe*, detto *spagnuolo* dal nome di sua nazione [14]. Po-

---

[12] L' *Abbaco* di Lionardo cominciò a rendersi comune per l' Italia fin dal 1202 — Cossali — *Origine, trasporto ec.*, vol. I. c. I. §.4.

[13] Nella sua dotta opera: *dell' origine, progressi ec. di ogni letteratura* ( *Scienze naturali* cap. III. §. 80. ).

[14] Prima dell' Ab. Andres, il francese Gua-de-Malves, per un istinto anti-italiano, aveva asseverantemente pronunziato che: *les arabes, et les maures avoient apportées dans l' Espagne, et qui de-la s' étoient répandues dans tout le reste de l' Europe* ( le regole dell' Algebra ): soggiugnendo poi in una nota, che: *je sais néammoins que quelques auteurs italiens, trop jaloux peut-être de la gloire de leur nation, ont prétendu que Léonard de Pisa avoit été s' instruire dans l' Arabie même, et qu'il en avoit apporté immédiatement en Italie l' Arithmétique et l'Algébre. Cette opinion est sur tout fondée sur l' autorité de Tartaglia.* Ma noi non istaremo a perder tempo in rispondere alle gratuite asserzioni del Gua-de-Malves, delle quali ha tenuto sì poco conto anche il Montucla, da non farne nè pur menzione.

steriormente nel XIV° secolo *Guglielmo di Lunis*, e poi *Rafaele Canacci* dell' Algebra pur trattarono, l'uno trasportando dall'arabico in volgar lingua un trattato anonimo conosciuto col nome di *Regola di Algebra*, e l' altro pubblicando un suo comentario sul medesimo[15]. Ed a quell'epoca, o poco appresso altri trattati di tale scienza tradotti dall' arabo, o composti da italiani si videro comparire, tra' quali si trova fatta menzione da' nostri scrittori di storia matematica di quello di Mohamad ben Musa, e dell' altro di Paolo de' Dagomari di Prato, soprannominato, per la sua eccellenza nell' Arimetica, Paolo *dell' Abbaco*.

Al principiar del secolo XV°, e nel corso di esso queste dottrine germogliarono grandemente, ed in tutt' i luoghi d' Italia coltivaronsi col nome di *Arte maggiore*, ovvero *Regola della cosa*, dell' *Algebra ed Almucabala* [16], come ne fa testimonianza il famoso Luca Paccioli, detto Luca *de Burgo*, da *Borgo S. Sepolcro* sua patria, nel *trattato* I. della *distizione* V^a della sua *Summa de Aritmetica, Geometria, ec.* Di fatti dalla scuola di *fra* Luca, e da altre che ve n'erano allora gran numero di coltivatori di questa nuova scienza si videro sorgere; ond'è che finalmente resa essa presso gl' italiani comune, passò ad altre nazioni di Europa, serbando però sempre l'impronta di questo suo luogo materno, ove era stata grandemente fecondata.

[15] Vedi *Cossali* nel §.5, cap. I. vol. I.

[16] *Cossali* cap. II. vol. I.

L'opera suddetta di *fra* Luca è distinta in due parti, nell'una delle quali ei tratta di Aritmetica, o piuttosto dobbiam dire dell' *Algebra ed Almucabala*, nell'altra di Geometria. E nella prima di queste, che cade nelle nostre presenti considerazioni, convien notare, che *fra* Luca aggiunse alle ricerche degli algebristi anteriori a lui la soluzione di tutte le derivative del secondo grado, che chiama *proporzionali*: e ciò mostra con quanta leggerezza il dottissimo Montucla [17], e più di lui ancora il Bossut abbiano giudicato di questo nostro illustre italiano, senza nè men darsi la pena di riscontrarlo. Nè queste cose pur furono sue invenzioni; ma, com'ei stesso accenna, eran già conosciute e praticate: egli però estese e generalizzò la regola fino a lui conosciuta solamente per le derivative di *quarto* e di *sesto grado*; e tentò pure con buon successo, o almeno perfezionò l' estrazione della radice dalle quantità specialmente dette *binomie* [18]. Le quantità irrazionali eran dunque a quell' epoca già conosciute ed in uso nell' analisi algebrica: ma di ciò diremo più particolarmente in appresso.

Le fatiche di tanti italiani illustri prepararono al-

—

[17] Vedi *Cossali* cap. VII. vol. I.

[18] *Cossali* opera cit. vol. I. pag. 238. *e seg.* — Con tal denominazione vennero specialmente dinotate le espressioni di due termini ciascun de' quali, o almeno uno fosse affetto del segno radicale; ed essa fu ritenuta da' più distinti analisti posteriori tra' quali l' Eulero; che perciò il traduttore francese de' costui *Elementi di Algebra* erra in dire, che fosse stato quello il primo a così chiamarle ( *Vedi nota al* §. *659. di tal traduzione* ).

l'Algebra nuovi progressi ed importanti nel XVI° secolo, in cui Tartaglia, Cardano, Scipione del Ferro, e Bombelli diedero le loro regole per lo scioglimento delle equazioni del *terzo*, e *quarto grado*; del quale argomento conviene quì tessere brevemente la storia. Ma prima bisogna osservare, che fino al Cardano rimaneva tuttavia ignota la risoluzione delle equazioni del *secondo grado*, in cui tutt'i termini, laddove fossero ridotti al primo membro, risultassero positivi, cioè della forma $x^2+px+q=o$, non che delle altre della forma $x^2-px+q=o$, laddove fosse $\frac{1}{4}p^2$ minore di $q$; e ciò perchè trattandosi allora puri problemi in numeri, riesciva più difficile diciferar da essi la natura, e l' uso delle radici negative, che però queste venivano considerate per *impossibili*. E non solamente per siffatte equazioni, ma anche più generalmente conobbe il Cardano la natura, e l' uso di tali radici, ch' ei chiamò *false*, in opposizion delle positive che disse *vere*, la qual denominazione serbossi nell' analisi delle equazioni fino al Vieta, ed anche posteriormente l' è stata usata; e distinse pure le radici false da un altro genere di radici, che chiamò *assolutamente false*, cioè le *immaginarie*, delle quali diede ancora esatte nozioni. Conobbe egli in oltre il teorema fondamentale per la composizione delle equazioni, e il numero delle radici di queste corrispondersi alle unità del loro grado, non che la maniera di ritrovare le radici razionali, quando ne avesse-

ro : di tutte le quali invenzioni, e di altre eziandio, non meno importanti, gliene rende giustizia anche il Montucla [19], scrittore delle cose agl' italiani appartenenti più diligente, e men prevenuto di qualunque altro storico francese abbia di proposito, o per incidenza trattata questa parte della storia delle Matematiche. Ma senza star quì ad enunciare partitamente quanto debba la risoluzione delle equazioni alle utili fatiche del Cardano, lo che andrà meglio fatto dopo aver esposte, nel presente trattato, tali dottrine [20], mi limiterò per ora ad accennar solamente, che tutta la presente teorica generale delle equazioni, ed i principali metodi per risolverle, hanno il loro fondamento nelle ricerche del Cardano, le quali se limitate veggonsi a casi particolari, e non presentate in quel grado di generalità di cui erano suscettive, debbesi ciò attribuire allo stato d'inceppamento in cui era allora l'analisi algebrica. Che anzi accrescerà sorpresa il pensare, che siensi fatte per pure considerazioni astratte; giacchè l'Algebra a quell' epoca era ancor priva di quella veste simbolica, che tanto gli è necessaria per facilitare le calcolazioni generali, e le ricerche sulle medesime; quantunque però dell'introduzione delle lettere per simboli in essa già qualche rastro se ne ravvisasse presso Diofanto; e che *fra* Luca, Tartaglia e Cardano avessero cominciato un poco ad

[19] Vedi l' *Histoire des Mathématiques* part. III. lib. III. n. 5.

[20] Veggansi le note in fine del volume, ne' luoghi corrispondenti.

estendere [21] : ma non era ancora giunta l'epoca che ciò venisse a perfezione ridotto.

Scipione del Ferro, al dir di Cardano [22] , fu il primo , che dando un passo più in là degli altri italiani, che lo avevano preceduto, rinvenne la soluzione di un caso particolare delle equazioni del terzo grado , quello, cioè , che secondo la nostra maniera sarebbe espresso da $x^3 + px = q$; e che col linguaggio di allora si sarebbe detto *capitolo di cosa e cubo eguale a numero* , dinotando $x$ la *cosa*, cioè l' incognita del problema, $x^3$ il cubo di essa , e $q$ il *numero*.Ed ei palesò questo suo trovato al suo discepolo Maria-Antonio *del Fiore*, e questi per jattanza di tal possesso spinse Nicola Tartaglia bresciano, uomo dotato di grandi cognizioni e di profondo ingegno, ma irritabile all' eccesso e vanaglorioso, a ricercar la soluzione generale delle equazioni di terzo grado, nel che riescì felicemente ; sicchè la scienza restò per le loro illustri contese grandemente ampliata . Superbo il Tartaglia di tal trovato , che di gran lunga superava il metodo posseduto da *del Fiore*,gli propose la solenne disfida di doversi scambievolmente proporre trenta quistioni , a patto che colui il quale ne avrebbe risoluto più gran numero avrebbe guadagnata la disfida.Questa ebbe luogo , e siccome il *del Fiore* non possedeva il metodo

---

[21] *Summa de Arit.*pag.83,84-*General Trattato di num.e mis.*part .II lib. VII. pag.109 - *Ars Magna* cap.XXXI. , e cap. XX. *de reg.Aliza.*

[22] *Ars Magna* lib. I.

della soluzione generale delle equazioni di terzo grado, e che Tartaglia ebbe accortezza di far cadere le quistioni da lui proposte ne' casi non conosciuti dal rivale, così costui nessuna potè risolverne, mentre al contrario tutte quelle da lui proposte furono nel brevissimo intervallo di poche ore risolute dal Tartaglia, che non volle però generosamente ricevere il premio convenuto [23]. Questi però custodì con gran secreto la sua invenzione, che desiderava com' ei stesso dice, perfezionare, e pubblicare, quando gli sarebbe tornato a comodo: ma essendosi fatto persuadere dalle replicate preghiere del Cardano, non senza ripetuti giuramenti, che non l' avrebbe ad altri fatta conoscere, e molto meno resa pubblica in alcuna sua opera, s'indusse finalmente a comunicargli un *capitolo* in cattiva rima, nel quale egli aveva compresa tal regola, per poterla così più facilmente ritenere a memoria. Ma Cardano mancando al patto giurato diede fuori, dopo poco tempo, questa general soluzione delle equazioni del terzo grado, avendola pubblicata nella sua *Ars Magna* nel 1545 [24], ond' è che gli analisti posteriori, grati per tal riguardo più al Cardano, che al Tartaglia, l'han-

[23] Chi desiderasse un' estesa notizia di tutta questa contesa dotta, potrà riscontrare il lib. IX. de' *Quesiti* del Tartaglia; o pure leggerla più brevemente, ma con distinzione grandissima riportata dal Cossali, nel cap. II. vol. I. della sua più volte citata opera.

[24] Tutto quest' altro procedimento potrà riscontrarsi presso il Tartaglia nella storia di ciò premessa a' libri XXXIV e XXXV. de' suoi *Quesiti*, e presso il Cossali nel luogo qui sopra citato.

no sempre denominata *formola Cardanica*, sebbene a rigore dovrebbe dirsi *Tartagliana*. Non è però che Cardano avesse lasciato questo argomento senza aggiugnervi ; mentre a lui dobbiamo la conoscenza del *caso irreducibile* delle equazioni del terzo grado; il risolvimento di talune equazioni cubiche che cadevano in questo caso ; ed i primi tentativi per vedere se con altro metodo di risoluzione potesse evitarsi siffatto sconcio [25] : ma al Bombelli era serbato mostrare, esser le radici delle equazioni cubiche per tal caso tutte reali , e'l modo da convertirvele. E queste ricerche fan vedere , che delle radici da noi dette immaginarie , si aveva già conoscenza in Algebra a' tempi di Cardano [26].

Dato il passo della risoluzione delle equazioni del terzo grado, fu esso a poca distanza di tempo seguito dallo scioglimento di quelle del quarto, per opera di Luigi Ferrari discepolo del Cardano; la quale altra importante scoperta fu pure risultamento di un problema proposto a disfida da un tal Giovanni Cella.

Tutte queste grandi ricerche fatte dagl' italiani mostrano abbastanza a chiunque , ch' essi dovettero conoscere il calcolo delle quantità irrazionali , senza del quale non mai tanto addentro avrebbero potuto penetrare nella natura e maneggiamento del-

---

[25] Card. de *Regula Aliza* ( *irresolubili* ) — Cossali: *Origine* , *trasporto* , *ec.* cap. IX.

[26] Vegg. a tal proposito le note a diversi §§. del lib. III , in fine del presente volume.

le equazioni composte, ed in quella delle loro radici. E ciò avrebbe dovuto bastare a rendere accorto il Gua-de-Malves di non pronunziare con tanta asseveranza, che nell' Algebra del Bombelli, la quale uscì alla luce ad uso delle scuole d' Italia nel 1589 [27], e ch' è il primo trattato di tal genere che abbiasi, siasi veduto per la prima volta comparire il calcolo de' radicali. E 'l Montucla, nè men facendo a ciò attenzione, ha ripetuto lo stesso errore del suo compatriota, quantunque egli, che da se medesimo ci si annunzia come ardente ed esatto ricercatore e scrutatore delle opere degl' italiani, non avrebbe dovuto ignorare, che Lionardo Pisano già quattro secoli prima del Bombelli, nel capitolo XIV dell' *Abbaco* manoscritto, trattò il calcolo de' radicali semplici e composti; che *fra* Luca v' impiegò i trattati II e III della *Distinzione* VIII della *Summa de Aritmetica*, *etc.*; che Tartaglia ne trattò anche a disteso ne' libri III, V, X ed XI della parte II. del *General trattato di pesi e misure*; e finalmente che Cardano se ne occupò pure diffusamente nell' *Ars Magna Arithmetices*. E fin delle *radici universali*, conosciute da *fra* Luca sotto il nome di *legate*, e così pur chiamate da Tartaglia e Cardano, avevan prima quello, ed indi questi altri trattato.

L' opera del Bombelli di cui poc' anzi abbiamo

---

[27] 1572 secondo *Cossali*, pag. 60 vol. I.

fatta menzione, oltre le regole di Algebra degli arabi, contiene tutte le ricerche del Cardano, e quelle del Ferrari intorno la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado; e quant' altro si era operato su questo argomento, fino all' epoca in cui egli pubblicò tal suo libro. Di tal che da esso è facile giudicare, che in meno di mezzo secolo la scienza algebrica fece in Italia i più grandi progressi, essendosi compiuta la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, vale a dire fatto quanto era possibile per la soluzione compiuta delle equazioni numeriche; gittate le fondamenta della teorica generale delle equazioni, con le tante verità intorno la natura delle loro radici ritrovate dal Cardano; ed essersi in somma ridotta questa a tale stato, da poter le ricerche ulteriori che la riguardano esser facilmente condotte innanzi da altri. Il Bombelli, come si è detto, terminò le ricerche sul caso *irreducibile*, e diede una compiuta calcolazione de' radicali immaginari [28].

La prossimità di territorio, le continue incursioni che i francesi facevano in diversi luoghi d' Italia, de' quali tennero per qualche tempo la dominazione, il commerciar con gl'italiani, e l' influenza religiosa che attivamente a quell' epoca esercitava la Corte di Roma sulla Francia, fecero sì che le scienze presso noi cominciate a rinascere, e con buon

---

[28] Veggansi le note in fine del volume.

successo coltivate, ivi prima di ogni altro luogo si trapiantassero con buon successo. Francesco Vieta [29], dotato di moltissima penetrazione d' ingegno, di grande attitudine al travaglio, e di una solida istruzione, a malgrado la sua carriera politica, e le sue occupazioni d' impiego, coltivò le Matematiche, alle quali fu utilissimo. Tralasciando quì il dire delle sue ricerche geometriche e trigonometriche, l'Analisi moderna gli dee l'uso più generale delle lettere per dinotar le quantità ne' problemi aritmetici, passo importantissimo pe' progressi ulteriori di questa scienza, che prese da lui in poi il nome di *speciosa*, o *simbolica*, distinguendosi interamente dall'antica, che tutta la forma aveva conservata della volgare Aritmetica [30], e di aver alquanto esteso quello de' *segni*. Ripigliò egli pure, e prolungò la dottrina delle trasformazioni delle equazioni già introdotta dal Cardano [31],

—

[29] Nato in Fontanai nel Poitou, verso il 1540, e morto in Parigi nel 1603.

[30] L' introduzione delle lettere per indicare universalmente le grandezze oltre ad avere un tipo anche presso Euclide, come si è detto nel *discorso preliminare* alla nostra esposizione degli *Elementi* di esso, osservavasi più manifestamente presso Diofanto; e nelle opere del Tartaglia e del Cardano non pur si ravvisano le sole tracce di Analisi speciosa, ma vi si ritrova di fatto indicata la via; sicchè a giusto titolo non deesi esser tenuti al Vieta, che di esser passato dagli esempi particolari al generale, di aver data la regola di usar de'simboli, e piantato il costume per essi. Nè tampoco gli si deve l' invenzione de'segni, mentre ci attesta egli stesso che il + ed il — eran conosciuti prima di lui.

[31] La trasformazione delle equazioni attribuita al Vieta dal Gua de Malves è opera del Cardano, ed è pur del Cardano la ricerca delle ra-

come si è di sopra accennato ; e quindi stabilì la regola per la *preparazione delle equazioni*, ch' è il fondamento dël maneggio di esse. Non bisogna però attribuirgli, come fa il Montucla, per nuova maniera, la formola ch' egli esibì per la risoluzione delle equazioni del terzo grado , essendo questa , come mostreremo a suo luogo, una facile riduzione della formola Cardanica [32] . E simile al metodo del Ferrari, ed in ciò conviene lo stesso Montucla, fu quello , ch'egli propose per lo scioglimento delle equazioni del quarto grado . Aggiunse ancora a siffatte ricerche i tentativi pel maneggio delle equazioni di tutt' i gradi, ch'espose nel suo trattato : *De numerosa potestatum resolutione*, da'quali vennero spinti in seguito altri analisti a trattare con miglior successo lo stesso argomento . Cercò ancor egli di estendere la ricerca delle radici delle equazioni per approssimazione già cominciata dal Cardano [33].

Il perfezionamento della scienza algebrica pura-

—

dici irrazionali di un'equazione per approssimazione ; e certamente, che se il Montucla avesse avuta la pazienza di riscontrar la *regola aurea* del Cardano, che riguarda quest'oggetto, non avrebbe asserito nella *part. III lib.* II *n.* 2 della sua *storia delle Matematiche*, che Vieta *à le premier recouru aux approximations , soit pour les équations du troisieme et quatrieme degres, soit pour les degres superieurs*. Nè è opera del Vieta l' artifizio di trasformare le equazioni complete in altre mancanti del secondo termine , artifizio che scintillò sicuramente al più tardi l' anno 1541 nella mente di Tartaglia , ed in pieno fulgore spuntò poi all' intelletto di Cardano l' anno 1544, nella sua *Ars Magna*.

[32] Note in fine del volume.

[33] Vedi Card. *Ars Magna — de regula aurea* , e Cossali vol. II. cap. VI. *part.* 2.

mente istrumentale, non poteva non ispirare l'idea di vederne l' uso, che nella sola Geometria poteva a quell'epoca farsene. Già Diofanto ne aveva dato il segno nel lib. VI° *Arithmeticorum*, e *fra* Luca più manifestamente, e con più estensione usandone aveva dati esempi di tale applicazione, da'quali Regiomontano aveva desunto ciò che posteriormente vedesi da lui fatto in tal genere, come nel *Saggio storico* premesso alla *Trigonometria* abbiamo accennato; e Tartaglia aveva ancor dati esempi di costruzione de' risultamenti de' problemi geometrici imperfettamente, come allor si poteva, con l' analisi algebrica risoluti. Nè si erano quest' italiani, primi promotori di tale applicazione, limitati a'soli problemi di 1° e 2° grado, ma ne avevano ancor trattati de' derivativi dal 4°; ed il Vieta, calcando queste orme ben segnate, rese più regolare una tale applicazione, che dal Cartesio doveva poi ricevere il suo compimento, come tra poco diremo.

All' incirca i tempi del Vieta, Guglielmo Oughtred [34] trattava in Inghilterra alcune delle stesse ricerche algebriche, o algebrico-geometriche, tal che la *formazione delle potenze*, le formole per le *sezioni angolari*, la *costruzione delle equazioni*, *ec.*[35]; ma le sue investigazioni non oltrepassavano i limiti elementari, nè eccedevano quelli già segnati dall'analista francese, quantunque non fossero prive di

---

[34] Nato nel 1573, morto nel 1660.

[35] Vegg. la sua *Clavis Geometrica*, e gli *Opuscula*.

merito, ed utili a'progressi della scienza, la qual cosa le fece, per alcun tempo, riguardar come classiche nelle Università d'Inghilterra, e fece più volte ristampare, dopo la morte dell'autore, i suoi *Opuscula.*

A questa stessa epoca l' Inghilterra vedeva anche sorgere in seno ad essa un uomo di merito distintissimo, che preparava nuovi aumenti ed assai importanti alla scienza algebrica, era questi Tomaso Harriot [36], cui deesi principalmente l' importante scoperta della natura e della formazione delle equazioni abbozzata dagli analisti precedenti, e che dee riguardarsi come pietra fondamentale di quel vasto edifizio, che su questo argomento doveva elevarsi dagli analisti posteriori. Ma siffatto suo trovato non vide la luce, che dieci anni dopo la di lui morte, nell'opera pubblicata in Londra nel 1631 col titolo di *Artis analyticae praxis.* Fu questo analista il primo a considerar le equazioni trasportandone tutt' i termini in un membro, e quindi come *ridotte a zero*, la qual forma è quella adatta a farne meglio conoscere le radici, o i fattori commensurabili; ma egli non giunse a vedere tutto il vantaggio che poteasi trarre da tal cambiamento di forma da lui attribuito alle equazioni, e non servissene che in qualche caso. È però da questa considerazione ch' ei trasse l' altra di vedere, che un' equazione composta ridotta a zero doveva risultare

[36] Nato in Oxford nel 1560.

dal prodotto di tanti fattori semplici ridotti ognuno a zero, quante erano le unità comprese nel grado di quell' equazione [37], scoperta che illustra grandemente il nome dell' Harriot, e che rischiarò la natura de' problemi, rendendola connessa con la loro equazione caratteristica. Da queste dottrine dell' Harriot emanarano come immediate conseguenze, che ogni equazione di grado impari dovesse avere almeno una sola radice reale; che le radici immaginarie dovevano sempre combinarsi a paja a paja, ed esser di forma determinata; che i coefficienti de' termini di un'equazione dovevano comporsi con una legge costante dalle sue radici; e se queste erano reali una legge costante doveva anche regolarne i segni. Finalmente che ciascuna radice di un' equazione doveva essere esatto divisore dell' ultimo termine di essa. L'Harriot introdusse anche l' uso delle lettere piccole per dinotar le quantità algebriche, invece delle grandi che prima adoperavansi. Ma se considerisi ciò che precedentemente da noi si è detto, troverassi, che abbia avuto torto il Wallis di attribuirgli il metodo delle trasformazioni delle equazioni, per liberarle dal secondo termine, o da' fratti, o dagli irrazionali; la conoscenza delle tre radici reali nel *caso irreducibile*, ed altre ricerche delle quali è anche più ovvio che si debba la conoscenza agl' italiani.

—

[37] Il Cardano l' aveva già avvertito per le equazioni di terzo grado ( *Veg. le Note* in fine del volume ).

L' Olanda volle anche contribuire la sua parte alle ricerche sulle equazioni numeriche, ed il suo cittadino Alberto Girard diede una più chiara nozione delle radici negative, nel libro intitolato *Invention nouvelle en Algébre*, pubblicato nel 1629. Dimostrò pure, che nelle equazioni cubiche comprese nel caso *irreducibile*, dovevano necessariamente esservi due radici positive ed una negativa, o al contrario; e stabilì in tale opera alcune altre dottrine, riguardanti la Geometria analitica.

Tanti lavori nella scienza pura algebrica, e nell'applicazione di essa alla Geometria, già sufficientemente innanzi prodotta, prepararono la strada al Cartesio [38], uno de' più grandi uomini ch' ebbe la Francia a quest' epoca, ed al quale le Matematiche debbon moltissimo, a perfezionar tali cose, ond' è che gli dobbiamo l' uso di scrivere le potenze co' loro esponenti numerici, maniera di grandissima abbreviazione e comodità nel calcolo algebrico, e lo sviluppo della natura e dell'uso delle radici, tanto ne' problemi geometrici, che aritmetici. Cominciò egli in oltre a considerare le quantità negative, come uno stato contrario alle positive; ed aggiunse alle ricerche fatte dall' Harriot la bellissima regola di conoscere in un' equazione quante potessero essere le radici positive e quante le negative. Finalmente introdusse nell' Analisi moderna il metodo de' coefficienti indeterminati, che di tanto van-

—

[38] Nativo di Turena, morì in Parigi nel 1650 in età di 54 anni.

taggio l'è stato in seguito. E per quello che riguarda l'applicazione dell'Algebra alla Geometria, diede il metodo di rappresentar convenevolmente per un'equazione una qualunque *locale*, dinotata da una proprietà geometrica, ed aprì la strada a' geometri posteriori di trattare col calcolo le ricerche sulle linee curve; il che di quanto vantaggio sia stato alla Geometria presso i moderni non v' ha al presente alcuno che lo ignori. Finalmente completò la dottrina delle equazioni geometriche del *terzo* e del *quarto grado* con la famosa costruzione di esse, ch' è il solo trovato de' moderni in tal genere da stare a fronte, ed ancor superare la Geometria greca.

Un altro illustre matematico ci si presenta contemporaneo del Cartesio, che si distinse non solamente in ricerche geometriche; ma ancora in quelle di Analisi pura: è questi il Fermat [39]. Le sue ricerche di questo genere consistono nella risoluzione di ciò ch' egli chiama *uguaglianze doppie*, *triple*, *ec.*, cioè delle equazioni a due, tre o più incognite corrispondenti a'problemi determinati; e quindi per questa parte conviene considerarlo come il primo ad esporre un metodo generale per le *eliminazioni*, ch' egli applicò all' importante problema di liberare un'equazione da qualunque irrazionalità, o *asimmetria*, come allora costumavasi dire. Le sue opere sono piene di problemi aritmetici assai difficili, da lui elegantemente risoluti; ed è fuor di

[39] Nato in Tolosa al cominciar del secolo XVII.

dubbio, che messa da banda la felice applicazione dell' Algebra alla Geometria, operata dal Cartesio, egli poteva stare allo stesso rango con questo, col quale si misurò in più rincontri, ed entrò diverse volte in disputa.

La strettezza de' limiti di questo breve saggio storico premesso ad un libro elementare, c' impedisce di far quì menzione di molti, che coltivarono con successo la scienza dell' Algebra nel xvii°. secolo, in Olanda, in Francia, in Inghilterra, nella Germania, nella Danimarca, nelle Spagne, ed in Italia, che lungo sarebbe enumerarli tutti, ed odioso il tralasciarne alcuno; e starà bene che chi sia curioso conoscerne i nomi e le opere legga il Montucla, nella *part.* IV. *lib.* ii. della sua *Storia delle Matematiche*, verso la fine.

La giusta celebrità del nome dell' autore, i grandi servigi da lui resi alle Matematiche in generale, e la singolarità assoluta del di lui merito non permettono però che si tralasci di dir qui brevemente dell' *Arithmetica Universalis*, dal Newton composta ad uso delle sue lezioni nella cattedra di Matematiche, che tenne nell' Università di Cambridge, cedutagli dal suo maestro Barrow[40], della quale istituzione servivansi già in Inghilterra nelle scuole da ben trent'anni, senza che alcuno prima del 1707 avesse pensato a renderla pubblica, come avvenne a

---

[40] Una tal cattedra, perchè fondata dal *Lucas* chiamasi *Lucasiana*, e professore *Lucasiano* quello che la sosteneva.

quest' epoca, senza sapùta dell' autore, e mal soffrendo egli, che venisse stampato un trattato da lui composto a solo uso d'istruzione privata pe'suoi allievi. Il pubblico però avendolo bene accolto, come conveniva al nome di un tanto uomo, ed al merito reale dell'opera, non fu il Newton in seguito scontento di tal pubblicazione; sicchè nel riprodursi in Londra nel 1722, dee supporsi, quantunque non vi si dica, che dovè porvi la sua mano in perfezionarlo, se riguardinsi gli aumenti importanti, e le correzioni fattevi, che non possono ad altro che a lui attribuirsi. Una tale opera è distinta in due parti, delle quali l' una riguarda il calcolo algebrico; l' altra l' applicazione di esso alla Geometria. E per ciò che riguarda l' Analisi pura, si ravvisa la mano del grand' uomo nella semplicità, e chiarezza come vi sono recate le teoriche di Algebra le più elementari, le quali veggonsi sempre esposte in modo da far procedere parallelamente l'Aritmetica volgare e la speciosa; e da far conoscere ad evidenza in che differiscasi l' una dall' altra. Vi è in oltre recato il metodo della *riduzione de'radicali a più semplici, per l' estrazione di radice*; trattata la dottrina delle *eliminazioni* con l' applicazione di essa a liberar da' radicali un' equazione; ed esposto il metodo della risoluzione de' problemi sieno aritmetici, sieno geometrici, con talune regole a proposito per ottener l' equazione ad essi la più semplice, e quindi la più adatta all' eleganza della soluzione. Gli e-

sempi, e le quistioni che vi si recano, sono scelti da non solamente rischiarar le dottrine stabilite, e che con essi si volevano illustrare; ma ancora per dar luogo a nuovi avvertimenti o precetti. In somma questo libro', oltre all' aver data la prima spinta a trattare con miglior metodo e maggior estensione l' Algebra, non ostante i progressi di questa, ed i molti libri d'istituzione che se ne sieno scritti posteriormente da sommi analisti, non intendendo quì parlar di quelli che a folla pubblicansi da parecchi anni a questa parte, da persone poco atte a tal lavoro, e talune ancora poco intelligenti nella scienza algebrica, continua a tenere il primo rango tra le opere di tal genere, ed il terrà sempre: nè ciò pel nome dell' autore, ma per l' utilità grande di cui è a chiunque vuol coltivare l' Analisi pura, e l'applicata alla Geometria. Diverse edizioni furono fatte di un tal libro in breve tempo in Inghilterra; e nel continente si vide pubblicato, per la prima volta nel 1732, in Leyden, per cura del Gravesande, il quale precedentemente nel 1727 si era limitato a darne alcuni chiarimenti, nell'opera che diede fuori col titolo di *Matheseos universalis Elementa, quibus accedunt specimina commentarii in Arithmeticam Universalem Newtoni*. Finalmente di nuovo, arricchita di dotti comenti da Giov. Castillon di Berlino, uscì alla luce per le stampe di Amsterdam nel 1761, nella quale edizione, dal dottissimo comentatore si trovano in fine recate le ri-

cerche fatte dal Maclaurin, dal Campbell, e dall'Halley, tre distintissimi discepoli del Newton, per estendere e perfezionar quelle intorno la soluzione e costruzione delle equazioni, esposte dal loro maestro, estraendole dalle *Transazioni filosofiche*, ove avevano meritato di essere inserite.

Dopo quest' epoca felicissima per le Matematiche, pe' molti sommi uomini che le coltivarono e fecero progredire, e per le grandi scoperte che si fecero nell' Analisi moderna, si videro uscire in luce molte opere, che meritano essere quì almeno accennate, perchè tuttavia utilissime alla scienza; tali sono, per dir le principalissime, il *Trattato di Algebra* del Maclaurin, che fu sempre intento a dare maggior luce e sviluppo alle dottrine del Newton, l'altro del Saunderson, la *Scienza del Calcolo* del Reyneau, gli *Elementi di Algebra* di Clairaut, e le *Instituzioni Analitiche* della nostra italiana Maria Gaetana Agnesi [41], scritte con ammirabile chiarezza, e con bell'ordine, delle quali la parte che riguarda l'*Analisi degl' infiniti*, sia quì detto di passaggio, fu tradotta dal Bossut per servir di libro elementare nelle scuole di Francia [42]. A questi biso-

---

[41] Questa illustre donna italiana, non solo, qual novella Ippazia, coltivò con grandissima utilità le Matematiche, ma con esempio unico nella storia delle scienze, le professò nell' Università di Bologna, insegnandovi le sue istituzioni, e formandovi una scuola.

[42] Di questa traduzione ne vidi una sola volta un esemplare nella limitatissima biblioteca del Fergola, i cui libri, dopo la di lui perdita fatale alla nostra scuola, essendo andati dispersi, nè avendone pur

gna anche aggiugnere le *Institutiones Analyticae* del Riccati e Saladini, e l'*Algebra* del Frisi. Finalmente il nome stesso dell'autore, e quelli de'sommi uomini che ne intrapresero la traduzione, e fecero eseguire la ristampa, sono bastanti titoli a mostrare, che non debba tralasciarsi di far menzione degli *Elementi di Algebra* dall' Eulero dettati in tedesco, quasi per passatempo, ed in tal lingua pubblicati la prima volta, e che per chiarezza e ricchezza di scelti problemi, ed elegantementi risoluti, non la cedono ad alcun altro di questo genere.

Chiuderemo questo argomento, e le nostre ricerche storiche intorno l' Algebra, con una breve analisi di un altro libro classico in tale scienza, opera di Luigi Lagrange piemontese.

Da che l' Analisi pura cominciò ad essere ardentemente coltivata, non poteva essere a meno che le principali mire degli analisti fossero tutte rivolte a perfezionare i metodi per la risoluzione delle equazioni, o in maniera compiuta, o almeno da farne ottenere le radici con la maggiore approssimazione possibile. I volumi degli *Atti* delle principali accademie di Europa erano pieni di lavori di questo genere di sommi uomini, e noi di taluni abbiamo già accennato di sopra. Il Newton non aveva tralasciato di proporre i suoi tentativi, che procedevano sulla legge stessa del metodo tenuto dal Ferrari,

potuto avere quelli che io gli aveva improntati, non so qual fato abbia avuto quell' esemplare.

per lo scioglimento delle equazioni del quarto grado; ma con meno felice successo. Il Leibnitz si era anch' egli molto occupato di quest' importante oggetto per l' Analisi moderna; ma quantunque da principio fosse restato molto contento del successo, per aver, com' egli diceva, ravvisata la strada da progredir al di là delle equazioni di terzo grado [43]; bisogna però credere, che in seguito l'avesse riconosciuto per illusorio; poichè non mai pubblicò questo suo metodo, nè i tentativi per esso. Il Tschirnhausen propose nel 1683 alla R. A. di Berlino le sue ricerche, per ridurre a pura qualunque equazione, trasformandola in un' altra nella quale svanissero tutt' i termini intermedi della proposta: e queste sue investigazioni sono, al dir di Lagrange, giudiziose ed ingegnose; ma che non sostengonsi al di là del *terzo e quarto grado*. Nè tampoco altri analisti anteriori, o contemporanei a questo erano stati più felici. L' Eulero, fatto per perfezionare ogni ramo di Matematiche, se n' era occupato per la sua parte; ma con tutto ciò questo argomento esigeva ancora nuove cure, e nuovi aumenti. In tale stato di cose, chi lo aveva potuto, aveva cercato aggiugnervi qualche cosa del suo, rivolgendosi a' metodi particolari; e l' Eulero stesso aveva il primo considerate le equazioni da lui dette *reciproche*.

Nella quasi impossibilità di poter riescire a risol-

---

[43] Vegg. la lettera da lui scritta al Collins — *Comm. Epist.* pag. 63, 64, e 65 ediz. in 4.

vere le equazioni di grado superiore al quarto l'ancora sacra erano i metodi di approssimazione, che, per altro, perfezionati sono quanto mai possa bisognare in tale argomento per gli usi algebrici; giacchè i risultamenti che ottengonsi dal maneggio di un'equazione essendo involti di radicali, non altrimenti che per approssimazioni si potrebbe pur giugnere al valore dell' incognita. Il Newton propose il primo su di ciò le sue ricerche; ed il suo metodo, e quelli dell' Halley, e del Raphson meritano tuttavia esser tenuti come i più generali. Giovanni Bernoulli se n' era anche occupato [44]; il suo fratello Giacomo [45] aveva dato un metodo grafico da rinvenire per approssimazione le radici reali delle equazioni di terzo e quarto grado; e Tomaso Simpson, Daniele Bernoulli, ed altri avevano anche messa all' opera la loro parte. Ma tutti questi lavori di uomini sì distinti non soddisfacevano ancor bene a' desideri degli analisti, ed a'bisogni dell'analisi algebrica. Tale era lo stato di questa per la risoluzione delle equazioni, quando l' illustre Lagrange prese a perfezionare ciascuna delle ricerche riguardanti siffatto argomento importantissimo, formando del suo lavoro diverse *memorie*, che presentò alla R. A. di Berlino, ne' cui *Atti* veggonsi pubblicate. Ma osservando poi che da queste risultava un compiuto trattato per le equazioni numeriche, ove i progres-

[44] *Lect. Calc. Integ.* Op. t. III.
[45] Atti di Lipsia an. 1689.

si de' metodi intorno ad esse vi si contenevano, raccolse tali *memorie*, pubblicandole, non senza nuove cure, nel 1808, col titolo di *Traité de la résolution des équations numériques*; il qual libro può ancora considerarsi come il limite dove lo spirito umano abbia potuto giugnere in questo argomento [46]; ed è quello che può segnare a chiunque osi correre innanzi in tal carriera il punto d' onde partire : nè v' ha ricerca che lo riguardi, che vi sia tralasciata, e che non sia generalmente e con estensione trattata. In tal libro di fatto si espone la natura delle equazioni, e trattansi i metodi di ogni genere già prima esistenti, o di suo conio per risolverle; i tentativi per iscoprirne se mai fosse possibile de' nuovi; i diversi metodi di approssimazione, e le varie ricerche, che dal maneggio generale delle equazioni dipendono, o le considerazioni su taluni generi di equazioni, che potevansi sottoporre a metodi particolari di risolvimento.

Il Waring celebre Analista inglese aggiunse ancor egli le sue meditazioni intorno le equazioni numeriche in generale [47]; ma nè egli, il cui metodo è analogo a quello proposto dall' Eulero nelle *memorie* di Pietroburgo per l' anno 1764, nè altri, che hanno battuto la stessa strada, vi sono meglio riusciti di coloro che gli avevano preceduti.

---

46 Nelle note in fine del presente trattato verrà, ove convenga, indicato quel tanto che posteriormente vi si è aggiunto.

47 Veggansi le sue *Meditationes algebraicae*, e le *Transazioni filosofiche* per l' anno 1779.

La dottrina delle eliminazioni, non ostante le fatiche di tanti illustri uomini, compreso il Newton, l'Eulero, e 'l Lagrange, restava ancora imperfettissima, e per la maggior parte de' casi impraticabile. Il metodo di eliminazione successiva, per le equazioni di grado superiore, supponendole non più che tre, riusciva sì imperfetto, che il solo scambiar l' ordine del maneggiamento di esse, combinando or la prima con la seconda, e poi con la terza, per ottener così due equazioni con un' incognita di meno, o pure la prima con la seconda, e questa con la terza, o anche la prima con la terza, e questa con la seconda, bastava a dare equazioni eliminate di grado diverso : ciò ch' è sufficiente a dimostrare quanta fosse l'inesattezza di un tal metodo. Aggiungasi, che l'eliminata saltava con una rapidità indicibile a gradi spaventevoli, e superiori di assai a quello che avrebbe dovuto avere per la natura delle equazioni proposte, se il metodo di eliminazione fosse stato proprio, e non inducente in fattori alteranti l' eliminata : di tal che con quattro equazioni di secondo grado a quattro incognite si saltava ad un'eliminata del 256° grado, mentre essa dovrebbe essere del 16°; e se le quattro equazioni fossero state del terzo grado, l' eliminata sarebbe montata al grado 6561°, mentre dovrebbe essere dell' 81°. Siffatti gravissimi inconvenienti spinsero il distinto analista francese Bezout, ad occuparsi seriamente de' metodi di eliminazione, a conosce-

re i difetti di essi, ed a ricercare i mezzi di ovviarvi. Egli riuscì a stabilire direttamente il grado dell'eliminata, quando potesse ottenersi libera da fattori inutili, mostrando poter questi solamente evitarsi quando le equazioni proposte si fossero considerate tutte ad un tratto, nel modo ch' egli assegna, che non è quì luogo di esporre: e tutte queste ricerche vennero da lui ordinate nell' elaboratissima opera: *Théorie génerale des équations algébriques*, che pubblicò in Parigi nel 1779 in un vol. in 4°, la quale tuttavia conserva il rango di classica in questo difficile ed importante argomento.

### Occasione del presente mio lavoro.

Dopo la breve esposizione dell'origine, e de' progressi dell' Algebra, per quanto poteva riguardare la parte di essa che trattasi nel presente volume, non voglio tralasciare di discolparmi col pubblico per avergli ancor io dato un libro elementare in questo genere. Dirò dunque primieramente che essendo passato nel 1806, in quell' ibrida organizzazione ch' ebbe luogo nella nostra Università degli studi, dalla cattedra di *Sintesi*, che vi aveva sostenuta per ben tre anni, a quella di *Analisi elementare*, dovei, secondo l'antico sistema di quello stabilimento cospicuo, compiere il trattato MS. ad uso delle mie lezioni [48]. Fu questa la prima imperiosa ragione a porvi mano, in tempo per altro

[48] Nella nostra Università antica l' ora di lezione era divisa in mez-

che non v' era quella folla d' istituzioni che ora si hanno , compilate senza un piano prima stabilito , senz' ordine, e senza scelta , se pure non sieno piene di positivi errori . Il solo libro ottimo in questo genere che possedesse l'Italia,e del quale precedentemente mi era talvolta servito nello studio privato, quando non poteva adoperarvi i MSS. del Fergola , essendo il corso analitico del prof. Paoli di Pisa , che nè pur ora va dimenticato , come con dolore osservo avvenire nel suo stesso paese.Crebbe l'incentivo a compiere il mio lavoro allorchè poco tempo dopo mi venne ingiunto dal governo di ordinare un Corso d'istituzioni matematiche *ad uso de' collegi e licei del regno* , come e stato già detto nel discorso preliminare al *Corso geometrico* , e che il Fergola volendo incoraggiarmi , sebbene avesse egli da gran tempo i suoi *Elementi di Algebra* , che nel 1800 aveva pur l'ultima volta riveduti, restìo com'era a pubblicare i suoi esatti e diligenti lavori, che tanto utile hanno recato alla gioventù napoletana,ed a'progressi delle Matematiche, propose che si adottassero i miei, contentandosi, che poi venissero continuati dal suo elaboratissimo trat-

---

z' ora per dettarsi a' giovani il trattato , e mezz' ora per la spiega , oltre quel tempo che impiegavasi dopo le lezioni per le difficoltà che dagli studenti proponevansi a' professori fuori la cattedra . E volevasi che il trattato fosse MS. , perchè il professore potesse tenerlo sempre al corrente de' nuovi progressi della scienza ; il qual sistema è ora , sconosciutosi il vero scopo della nostra Università,di essere una pura scuola di perfezionamento, andato in disuso , insieme a tanti buoni e dignitosi che ve n'erano .

tato di *Analisi degl' infiniti*. Ma le mie altre occupazioni di allora, anche per la compilazione della parte geometrica di quel *Corso*, non avendomi permesso di attendere ancora a questa, si rimase così la faccenda fino al 1811, alla quale epoca essendosi fondata in Napoli la *Scuola politecnica*, e que' professori avendo proposta pe' loro allievi la traduzione di un corso elementare francese assai impare all' istituzione che dovevanvi ricevere [49], il general Tugny, che teneva allora il ministero di Guerra e Marina, ricevuta con sorpresa siffatta proposta, dirigendosi a chiederne parere alla R.A. delle Scienze, più volte ripeteva nella sua lettera, desiderar egli che la *scuola politecnica napoletana fosse istruita su di un Corso nazionale* [50]. Sublime pensamento di uno straniero, da far vergognar coloro tra noi che ora non riconoscono altre istituzioni che da questi; e mentre noi per lo passato, come il resto dell' Italia, non avevamo avuto bisogno di ricorrere a stranieri ajuti, ci vediamo adesso assoggettati ad un sistema d' istituir la gioventù a partito, che non sa di nulla, e che tal volta l' obbliga a prima apprende-

—

[49] Il Corso detto di *Bellavene*, ad uso delle scuole militari di linea per l' impero francese, stabilito in *Saint-Cyr*.

[50] Ecco le proprie sue parole su tal proposito: »Tra i *Corsi matematici* di autori nazionali ve ne sarebbe forse uno adottabile nella scuo» la Politecnica-militare di Napoli? Quello del sig. Fergola precisamen» te può rendersi completo per quest' oggetto per tutto l' anno 1812.
» Nella prevenzione, che io amerei sempre, che *gli alunni della scuola* » *Pobitecnica-militare di Napoli facessero i loro studi su di un' opera* » *scritta da un nazionale, se fia possibile*.

re il francese, come un tempo, e ragionevolmente doveva farsi della lingua latina, ormai troppo messa in non cale nelle scuole, principalmente da' giovani matematici; da che avviene ancora che al presente, non potendosi leggere tutte quelle opere classiche di distinti uomini del passato secolo, si prendono spesso per nuove talune ricerche già trattate, di che vedrassene più di un esempio nelle note in fine del presente trattato [51].

Nè quell' ottimo statuale si limitò solo a queste sue lodevolissime intenzioni; ma alcun tempo dopo abbandonando Napoli, per ritirarsi a menar vita tranquilla in sua casa, staccava dal ristretto peculio, che una vita severa ed irreprensibile gli avevano procacciato, duc.800, ed al Fergola legavagli, perchè potesse cominciar la stampa *del Corso di Analisi*, pensando che di ciò fare l' impedisse la sola mancanza de' mezzi pecuniari; scrivendogli la lettera, che per conservar la degna memoria di un sì generoso procedimento recherò in fine di questo *discorso preliminare*, insieme alle altre cose che vi ebber luogo seguentemente. E da ciò può vedersi, che fino all' epoca del 1814 presso noi desideravasi un buon *Corso di Analisi algebrica*, e quanto decentemente si pensasse al mezzo di prov-

---

[51] È questa ancor la ragione del disprezzo che fanno taluni nostri insipientucci delle opere degli antichi, nelle quali non sono stati istituiti, nè posson leggere, mancando loro la conoscenza anche del linguaggio latino in cui sono state tradotte, ed arricchite di buoni comenti.

vederlo [52]. Ma l' ultima spinta che determinommi a por mano alla stampa fu la riforma della *R. A. di Marina* avvenuta nel 1817, alla quale ebbi molta parte, e che in poco tempo fruttificò grandemente in vantaggio della gioventù del nostro paese, che destinavasi alla carriera del mare; e deesi alla vertigine politica del 1820, della quale ancor risentiamo i tristi effetti, attribuire il disastro di uno stabilimento che in poco tempo, e con tenue spesa aveva dati ottimi risultamenti, e ne prometteva maggiori. Si volle dunque allora che le istituzioni da porre nelle mani di que' giovanetti fossero tutte a stampa; e però mi vidi costretto a ciò eseguire pel trattato *di Analisi algebrica*. Nè però osai a dirittura pubblicarlo, ma ne faceva distribuire i fogli ad essi, e ad altri di altre scuole italiane, ove ne fui richiesto [53].

—

[52] Poichè quì mi si presenta l' occasione non voglio tralasciare di far conoscere come il dotto generale *Campredon*, quando si creò tra noi sotto la sua direzione un corpo di *ponti e strade*, che con pochi mezzi recò al paese più vantaggi di quelli, che con grande dispendio se ne ottennero in appresso, e non produsse in brevissimo tempo ingenti fortune, e ad esso aggiunse una ben limitata scuola, come alla specialità di simil corpo facoltativo si conviene, senza che conoscessemi, e senza alcuna prevenzione, ordinò che le istituzioni di *Geometria Descrittiva* fossero quelle da me composte fin dal 1801, per le scuole del Genio e dell' Artiglieria, e che furon poi pubblicate nel 1807, per ordine del Governo; che pure erano affatto calcate su quelle del Monge, con avervi solamente rese più geometriche alcune dottrine, e semplificata alcuna costruzione.

[53] Con questa occasione aggiunsi ancora al *Corso geometrico* la *Trigonometria sferica*, e feci pur pubblicare da' distinti professori Greco, Marano, e Lampredi un *Corso di letteratura* adattato e questo luogo d'istruzione speciale, del quale ne fu in brevissimo tempo esaurita l' e-

La fretta con la quale fu fatta questa stampa, in mezzo alle mie moltiplici occupazioni di allora, vi fece correre non pochi errori, anche per espressioni algebriche; il quale sconcio quando una volta avvenga in libri di simil fatta, riesce ancor difficile correggerlo del tutto nelle ristampe, principalmente quando l'autore non possa direttamente occuparsene: e però nelle seguenti tre edizioni non essendo interamente svanito, mi sono questa volta adoperato a tutto potere di emendarlo; al che se non sarò pur adesso riuscito interamente, ne dimando perdono per la mia età, e pe' miei occhi defatigati non solo, ma per quelli ancora de' miei veterani stampatori. Il nostro pubblico, che conosce come io lavoro assiduamente, e più che la mia età nol comporta, spero che in vista delle buone intenzioni verso di esso, e dell' impegno che in una lunga carriera ho sempre dimostrato, di stabilire sempre più l'istituzione matematica presso noi, senza mai deviarne, per incentivi di miglioramento di vita che mi si fossero presentati, voglia condonarmi le imperfezioni delle quali potranno forse risentire que' lavori in non piccol numero della scuola napoletana, che ora sto con dispendio impare alle mie forze pubblicando a suo vantaggio, e per decoro del nostro paese, per imperizia oltraggiato villanamente da' suoi nazionali: *Vide temporum iniquitatem*!

dizione, e bisognò farne una seconda, che fu pure estinta prima della sovversione di quello stabilimento.

Messomi dunque la prima volta ad ordinare gli *Elementi di Analisi algebrica*, ecco il piano che mi proposi.

Sebbene tutte le parti di un corso matematico mirino all' invenzione, questa però vi riguarda con ispecialità grandissima, da che ad essa si è data da più di un illustre matematico il nome di *Analisi*. Un metodo dunque di deduzione o sia per isviluppo deve essere più proprio a tramandarne le dottrine, le quali avendo tra loro uno strettissimo nesso rimangono però per tal modo ancora rischiarate. Adunque si vede, che il metodo analitico sia più proprio ad un trattato di *Analisi algebrica*, che un pretto metodo sintetico, come ne usarono gli analisti principalmente italiani del XVII° secolo, nel che l' Eulero imitolli in tutte le sue moltiplici opere, e fu dal Fergola scrupolosamente seguito. Aggiungasi che, precisamente per quel nesso che si è detto, usando un tal metodo si è spesso nell'obbligo di trarre da una proposizione principale molti corollari, la qual cosa per altro nel metodo geometrico è un difetto; e nel renderne enunciative le proposizioni che vi si contengono spesso allungasi di molto. D' altronde ve n' ha talune, che per ben ricordarle, e ridursele familiari bisogna renderle enunciative, e però esporle in forma di proposizioni o dimostrative, o di ricerca. Mirando dunque a questo doppio scopo mi parve, che il miglior metodo a tenere per un corso di *Analisi* si fosse il misto, cioè trattan-

dovi le materie con metodo analitico, e per isviluppo; ma nel tempo stesso esponendo in forma di teoremi certe verità principali, e fondamenta e principii di una teorica, che deve poi svilupparsene : ed in questo sentimento mi ha sempre più confermato la facilità con la quale ho veduto svolgersi le dottrine che doveva trattarvi, e la chiarezza che n'è risultata nell' insegnamento. Ed in verità se ben si consideri la cosa si troverà, che così abbiano pensato e pensino tutt' i principali analisti; poichè altrimenti essi non avrebbero potuto indicare taluni principii fondamentali di Analisi algebrica, denominandoli *teoremi*, e dicendo *p.e.* il *teorema di Cartesio*, *di Newton*, di *d'Alembert*; il *teorema di Taylor*, il *teorema di Maclaurin*, *di Cotes*, *ec.* Essi dunque ci hanno voluto così indicare, che tali verità dovevano essere esposte in forma enunciativa. E questo stesso sistema vi terrò nel vol. II. ove dell'Analisi delle quantità *indeterminate*, e delle *variabili* bisognerà trattare. Come poi il terzo e quarto volume, che riguarda l'*Analisi degl' infiniti*, si appartiene al Fergola, se non che dovrà esser completato ed in alcuna parte perfezionato, al che spero vogliano cooperarsi alcuni miei antichi allievi, ed ora distinti professori, così vedrò, quando saremo a tal caso, qual temperamento più convenga.

Da ciò che ho detto rilevasi, che io non doveva cambiare di piano nelle ristampe, e che il libro doveva per l'ordinamento rimanere sempre lo stesso:

non così per le dottrine; poichè l'Analisi algebrica non è come la Geometria elementare, che ha stretti e certi limiti segnati negli *Elementi* di essa: ma come ha bisogno di estendere, e perfezionare le sue dottrine, dee però una istituzione di essa corrispondere allo stato di aumento cui la scienza è giunta. E questo, mercè i mezzi valevolissimi preparati dagli analisti del passato secolo, ed i molti che ora la coltivano, si vede di giorno in giorno cambiare, tendendosi sempre a quel perfezionamento tanto desiderato di essa, e tanto necessario all'aumento delle Matematiche in generale, e delle facoltà che ne dipendono; poichè a misura che si rettificheranno, ed estenderanno i metodi algebrici, la Geometria si arricchirà di verità nuove, e di nuove costruzioni, e la Meccanica in generale si perfezionerà non solo, ma si spianerà oltremodo la via a percorrerla. L'analisi algebrica è un'istrumento che il matematico adopra nelle sue ricerche, e non basta che sappia adoperarlo, ma bisogna che questo al miglior tempo non gli cada in difetto; da che spesso avviene che un'analista debba abbandonar una ricerca ben avviata, e condotta fin quasi al termine, ed alla quale avendo impiegata molta fatica, nulla gliene rimane; sebbene in altre circostanze sia questo il mezzo da perfezionar la parte istrumentale dettandone al bisogno i miglioramenti.

Le ricerche trattate con metodo analitico ho poi cercato scinderle in brevi paragrafi, sì perchè si ri-

levasse meglio da'giovani apprendenti ciò che in ciascun di loro si vuol mostrare, e sì ancora perchè avendone bisogno in citarli, non si fosse obbligati ad andar rintracciando la citazione tra più cose,che in un lungo ragionamento si comprendevano. E per tal ragione vedesi ancora recato in fine del presente discorso un' *indice* minuto delle materie contenute nel presente trattato, per mezzo del quale sarà facile a' giovani rinvenirle all' occorrenza.

Che non si aspetti però alcuno di vedere in queste istituzioni compilati metodi a metodi,e ricerche a ricerche, senza discernimento, e senza critica. Io scrivo libro elementare, e questi debbono sempre aver limiti definiti, nesso necessario, e sceltezza di dottrine; ed essi avranno raggiunta la loro maggior perfezione possibile, quando pongano l'apprendente nel caso di percorrere senza difficoltà le opere classiche della scienza nello stato cui è pervenuta, e riscontrare l' immenso numero di memorie matematiche, che trovansi registrate ne' volumi delle principali Accademie di Europa, o in altre dotte collezioni [54]. Ho voluto ciò notare, perchè mi avveggo pur troppo che in questo attualmente si pecca gravemente, e che taluni poco accorti autori d' i-

—

[34] Tra queste meritano un luogo distinto gli *Annales des Mathématiques*, che pubblicavansi dal *Gergonne*, e'l *Giornale di Matematiche* che pubblicasi dal valente geometra di Berlino sig. *Crelle*, nel quale veggonsi raccolti importanti lavori de' matematici principalmente tedeschi, e sol dispiace che la più parte siano scritti in tal lingua.

stituzioni analitiche, e poco sperimentati debbo credere nell' insegnamento, hanno creduto di produrre un miglior libro ammassandovi maniere diverse tenute per una stessa ricerca, e talvolta prendendo ancora, e dando per diverse quelle che non erano che la stessa cambiata di veste, senza discernerlo. Ed essi nel primo caso hanno non solo gravata la gioventù, ma l' hanno gettata nella confusione, ignorando questa il mezzo al quale convenga dare la preferenza; e nel secondo le hanno anche prodotto uno spirito falso, o al manco reso sì leggiero il discernimento, da prendere per essenzialmente diversa una semplice trasformazione. E per questa ragione ho ancora tralasciato il prolungamento di talune ricerche, riportandone quel tanto, che per questo primo grado a percorrere il vasto campo dell' Analisi moderna era necessario; e questa volta ho ancor suppressa taluna cosa che nelle precedenti edizioni aveva recata, sembrandomi che per essa, senza necessità, si potesse indurre i giovani in equivoco, nè essere ancora il tempo proprio da presentargliela con quella discussione che vi occorreva. Che coloro i quali vorranno dunque giudicare di questo mio lavoro, il facciano avendo presente ciò che quì ho detto, e che prima d'imputarmi alcuna mancanza veggano se ciò non sia una superfluità, e se all' ordinamento da me stabilito si convenga in quel luogo: e si abbia presente, che con questa prima parte dell' Analisi algebrica io non ho considerate

le grandezze, che nel loro stato più semplice e particolare, per elevarmi a mano a mano nel vol. II. a considerazioni più generali intorno la natura di esse.

Mirando poi d' altra parte allo scopo principale dell'Analisi algebrica, ch'è la risoluzione de' problemi, ho cercato, in luoghi opportuni, e con esempi a proposito, rischiarare la loro natura, per quanto la trattazione presente permetteva, serbandone il complemento al trattato dell' *invenzione geometrica*; ed altri principii ancora spargendone, come cadeva in acconcio, nelle note a'volumi del *Corso geometrico*, e specialmente in quelle della *Trigonometria*. E quì accennerò solamente de' cap. vii ed xi del lib. II, nel primo de'quali ho abbozzato l'importante argomento della *determinazione* ne' problemi, per quanto poteva concernere quelli proposti su i numeri, e mi ho così aperta la strada a dichiarare taluni paradossi, da cui l' Algebra non va esente, principalmente allorchè entra nelle astrattissime considerazioni dell'*infinito*, che ho cercato allontanare al più possibile da questa prima parte dell' Analisi algebrica, ove mi era proposto trattare la quantità nel solo stato di *determinata*, o *determinabile*. E per tal ragione vi ho ancor suppresso questa volta il capitoletto della *divisione all' infinito*. Nell' altro poi sono entrato a dichiarare la natura de' problemi, e quella delle loro radici, del quale argomento con dispiacere ravvisava un difetto in tutt' i libri di analisi algebrica, e che ho cercato

ancora prolungar nelle note, in una delle quali, ho colta l'occasione di distruggere le strane idee, ed i principii erronei di taluni nostri professori su di un difficil problema da me riproposto, per promuover tra noi lo spirito geometrico.

L'Algebra, come ben rifletteva l'acutissimo Wolfio, fin da' tempi suoi, ch' essa non aveva preso lo slancio di ora, e l' indipendenza assoluta dalla Geometria, della quale però ancora sente il bisogno in molte sue ricerche, e le più importanti nell'*Analisi sublime* [55], non manca di dar luogo taluna volta a paradossi, che eccedendo i limiti della più grande astrazione, passano nel campo dell'incomprensibile. Ma questo difetto gli viene ora accresciuto dalla facilità con la quale si discorre, da giovani analisti poco esperti, di ogni risultamento che lor sembra nuovo, senza considerarlo, e talvolta calibrarlo con la Geometria, come fecero sempre i primi analisti italiani, e poi ne calcaron le orme tutt'i più grandi del secolo XVII° e XVIII°; ed ancor nel nostro taluno de' più benemeriti della scienza algebrica.

Ma ritornando al mio proposito di dichiarare ciò

---

[55] Non sono mancati tra' più recenti matematici che hanno composti Elementi di Analisi algebrica alcuni, che abbiano raccomandato altamente l' uso della Geometria in comprovare talune teoriche dell' Algebra. Tra questi il Lhuilier chiude i suoi *Elémens d' Algébre* con un *appendice*, nella quale reca alcuni *rischiaramenti geometrici*, dolendosi che : » les mathémsticiens modernes, depuis Descartes jusqu' a nos » jours, se sont occupés avec soin des applications de l' Algébre a la » Géométrie, et leur travaux à cet égard ont beaucoup contribué à l'a» vancement des sciences mathématiques soit abstraites, soit appli-

che ho inteso dover fare in questi elementi di Analisi algebrica, dirò che in essi, senza tralasciare alcuna delle dottrine importanti, ho più cercato di stabilir bene queste, che di accrescerne il numero con altre, che potevansi omettere, rimettendole ad un compimento d' istruzione. Io non pretendo che questa parte del *Corso* possa mai prendere un rango, ed un andamento pari agli Elementi di Geometria Euclidea, ma pure è questo il modello di perfezione al quale ogni ramo d' istituzione matematica dee livellarsi; e siccome in quelli nulla v' è di superfluo al nesso delle proposizioni, e nulla omesso per progredire nella Geometria, e nelle Matematiche in generale, così pure ho cercato che avvenisse degli Elementi di Analisi algebrica, per quanto la natura delle materie che trattava il comportavano.

Per tal ragione aveva tralasciato le altre volte di trattare elementarmente nel presente volume le teoriche delle *progressioni aritmetiche* e *geometriche*, e de'*logaritmi*; de'quali argomenti doveva più estesamente occuparmi nel volume II. Ma riguardando questa volta al bisogno che ne avevan coloro che ad una prima e più elementare istituzione in Matematiche si arrestano, senza progredir oltre, nè volendo obbligarli a cercar tali cose in un altro volume, le ho recate in questo, terminando con esse la Parte I. E però nel cap. XIV. del lib. II. ho

» quées. *Mais il se sont bien moins occupés de l'application de la Géo-*
» *métrie à l'Algèbre.*

g

trattato delle *progressioni aritmetiche*, nel seguente ho applicate le dottrine in quello esposte a' *numeri figurati* in generale , dando a tal materia uno sviluppo assai semplice e chiaro , e con una brevità grandissima . Di più nel cap. XVI. ho esposto la dottrina delle *progressioni geometriche*, e nel XVII. quella de' *logaritmi volgari*. Finalmente ho recato nel cap. XVIII. un' esercizio di problemi per applicazione delle teoriche stabilite in questi quattro capitoli , cercando per tal modo di sostenere e promuovere sempre più ne' giovani lo spirito d'invenzione.

Per la stessa ragione di sopra addotta ho questa volta trattato nel cap. XII il maneggio delle equazioni *biquadratiche* , ossia di quarto grado *derivative* dal secondo , staccando questa tal parte delle equazioni *derivative* dall' argomento generale per esse, che dovrà venir esposto, come le altre volte, nel lib. III. E similmente ho fatto per l'estrazion di radice da' *binomi* , limitandone quì la trattazione a quelli quadratici , de' quali solo si aveva bisogno dopo il maneggio delle suddette equazioni, e di quelle del 2° grado.

Debbo in oltre protestarmi di essere stato ancora assai restìo ad introdurre nuovi *termini*, o *segni* senza un' assoluta necessità ; poichè con quest'uso smoderato di linguaggio e simbolizzazione, che ora chiunque si permette, la scienza si va a mano a mano gettando in tale confusione, che perdendo la prerogativa che ha finora avuta di un linguaggio uni-

versale, diverrà intelligibile solo a coloro che abbiano studiato uno o un altro libro. Le nuove voci, ed i nuovi segni si debbono adottar sol quando l' universalità degli analisti li abbia ricevuti, e che veggansi nelle opere classiche della scienza adoperati. Nulla poi dico di più dannevole, che il cambiamento delle antiche voci usate nella scienza in altre, per solo spirito di novità, e senza alcuna ragione o vantaggio. Ed aggiugnerò ancora, che nello stato attuale della scienza sarebbe un male di rinunziare a talune voci adottate in essa, e seguite costantemente, quantunque considerandole si trovassero improprie alla cosa che esprimono, come in alcun luogo del trattato ho fatto avvertire. Non dico che talune di esse sono credute improprie, perchè non ben se ne intende la natura, e però sono state da taluni male a proposito cambiate.

Mi è molto rincrescevole di aver dovuto discendere a notar tutte queste minuzie; ma esse in altri tempi inutili, le ho giudicate necessarie nello stato attuale in cui disgraziatamente veggo ridotto l' insegnamento delle Matematiche, principalmente nel mio paese, cui con ispecialità destino questi miei ultimi lavori.

## Lettera del generale Tugny al Fergola
*della quale è detto nella pag.* xxxix.

---

Signor D. Nicola Fergola — *La stima che ho concepita de' vostri talenti, ed il desiderio che ho sempre avuto di vedere la nazione napoletana in possesso del frutto de' vostri studi matematici, specialmente nel Calcolo sublime, mi porta a pregarvi di accettare una somma di ottocento ducati, per mettervi al caso di dare alle stampe il vostro corso di Analisi che tenete pronto, e che sembra non esser rimasto inedito per altra ragione che quella della mancanza de' mezzi pecuniari, per quanto mi dissero i vostri ottimi scolari Flauti e Giannattasio. La somma necessaria è di gran lunga superiore a quella, che mi fo lecito di mettere a vostra disposizione; ed io avrei desiderato che i miei mezzi mi avessero permesso di compiere quella necessaria. Vi sarò tenutissimo di non dimenticarmi nella ripartizione degli esemplari, de' quali vi prego farmene pervenire almeno uno. Il sig.* Cosiron, *che ha la compiacenza d' incaricarsi della mia lettera e della somma, leverà tutte le difficoltà che potrete incontrare nella presente occasione, colla quale adempisco nell' istesso tempo ad una dolce inclinazione da me sempre nutrita per le scienze che coltivate con tanto successo e tanta modestia, ed al desiderio di non privare più a lungo la Nazione napoletana del frutto de' vostri studi matematici, e comprovare alla seconda patria tutto il mio attaccamento, e l' interesse che prendo e sempre prenderò alla sua gloria—Gradite, signore, gli attestati della mia vera stima* — Il barone Tugny — Napoli li 8 giugno 1814.

• Contemporaneamente a questa lettera il general Tugny ne dirigeva al sig. Cosiron la seguente altra.

*Je prie M. Cosiron de se charger de remettre à D. Nicola Fergola la somme de huit-cent ducats pour mon compte particulier, afin de le mettre à même de faire imprimer son* Cours d'Analyse, *ou au moins son* Calcul differentiel et integral, *qu' il devait imprimer depuis long-temps d' après ce que m' ont dit ses écoliers MM. Flauti, et Giannattasio, qui à mes fréquentes prières à ce sujet m' ont toujours répondu, que cela tenait au defait des moyens pécuniaires : la somme de huit-cent ducats est insuffisante, et j' aurois désiré la porter à mille au moins, mais j' ai du me limiter à celle qui se compose de trois-cents ducats comptants, et 500 ducats aussi comptans, mais à recevoir du général Macdonald. J' en préviens M. Fergola, qui ne devrà voir dans cette disposition qu' une suite*

*de mon attachement pour le beau Royaume de Naples, et pour les sciences qu' il cultive avec une modestie, et une distinction rares.*

Naples le 8 juin 1814 — Tugny.

Alla gentile e generosa esibizione dal general Tugny il Fergola rispose con la seguente lettera.

Veneratissimo sig. Barone — *Con alta venerazione ricevo i caratteri di V. E. ov' Ella mi dinota di avermi destinati duc. 800, ond' io potessi dar in luce i miei scritti sull' Analisi sublime, per bene della mia nazione. Cotesta munificenza diretta a sì nobil fine è il più glorioso monumento di V. E., ed è pure l' indelebile impronta di mia gratitudine verso il magnanimo suo cuore. Vorrei prestarmi immantinente ad un tal lavoro, se i miei fisici malori non mel vietassero. Chi mai non sa quanto io soffro da più lustri pe' miei spasmodici mali? Ora per l' anomalia delle stagioni essi han crudelmente ripiegato nello stomaco ed in sul petto; e temo forte che tra pochi dì io non vi soggiaccia, come a tanti altri, assai di me più sani, è avvenuto. E rimanendo in vita dovrò curarmi per lungo tempo senza più fare.*

*Signore, è mai giusto e ragionevole, che io col sentimento della propria deficienza imprenda l' esecuzione di un' opera, ove il più lieve impegno è il render facili le verità difficili e sublimi? In buona fede potrò prendermi quel danajo che mi si offre a tal fine? Ed ancorchè io stessi ben robusto e sano, potrò postergare quelle altre opere che ho anteriormente promesse al pubblico, ed all' Accademia Reale delle Scienze? E perciò io nulla potrò risolvere di ciò che mi si è scritto, se la natura ed il tempo non decidano della mia fisica sufficienza. Intanto col massimo rispetto e col più vivo e sincero sentimento di gratitudine, io mi dichiaro.*

Di V. E.
*Napoli 11 giugno 1814.*

*Umiliss. servo vero*
Nicola Fergola

Con ciò si vede ch' egli ricusò il donativo degli 800 ducati, che non però tornarono in mano del donatore, come nè tampoco gli pervenne mai una tal lettera; poichè il general Tugny partiva da Napoli nel momento stesso che dirigeva la sua lettera al Fergola, di cui aveva fatta la personal conoscenza appena il giorno innanzi, essendolo andato a visitare fin sopra Capodimonte ove quello abitava, annunziandosi per un forestiero; e non ne sarebbe stato forse conosciuto, se a caso non vi si fosse ritrovato il Giannattasio.

Mancato di vita il Fergola nel dì 21 giugno 1824, ed avendone io recitato l' elogio in pubblica assemblea della *Società Reale Borbonica*, nel dì 26 settembre seguente, ne mandai un esemplare a stampa al generale suddetto, insieme ad un esemplare del trattato di *Geometria di sito sul piano e nello spazio*, che aveva ristampato nel 1822, ed in risposta n' ebbi la seguente lettera:

*Bourguignon sous mont barne près Laon le 25 aout 1825.*

*J' ai recu, monsieur, avec l' éloge historique de feu le savant Fergola, votre cours de* Géométrie déscriptive. *J' aurois voulu avant de vous en remercier pouvoir les parcourir et vous prouver tout le cas que je fais de cet envoi, en vous en donnant mon opinion; mais au moment ou je commencais a m' en occuper, un triste evenement est venu m' arracher a mes paisibles occupations, et j' ai du aller rendre les derniers devoirs a ma réspectable mere, ce qui m' a tenu quelque tems loin de chez moi, et a mon retour j' ai voulu ne pas tarder d' avantage a vous offrir mes bien sinceres remercimens pour votre bon et genereux souvenir. Je deplore avec vous la perte de votre respectable maitre, et je desire que vous voyez le desire que j' aurois de la reparer en vous priant de recevoir de* M. de Cosiron*, a qui j' écris a cet effet, les huitcent ducats qui avoient été par moi consacré a aider M. Fergola dans l' entreprise de l' impression de son cours de Calcul infinitesimal, et qu' il a restitué, ne se sentant pas la force de faire ce bel ouvrage.*

*Si vous l' agréez, vous aurez en même tems la force et la vigueur necessaire pour completer le cours napolitain de sciences mathématiques, chose si desirable et a la quelle j' etois fier, comme je le suis encore de pouvoir contribuer: c' est une obligation personnelle que je vous aurai, et je serai flatté d' en recevoir un exemplaire en son temps. J' ai déjà toutes le autres parties recues a Naples. Je dois vous remercier, monsieur, de tout ce que vous voulez bien me dire d' honnete, et je vous prie de croire que je tiens encore a l' éstime de vos concitoyens et a la votre, comme j' y ai toujours tenu; et il m' est doux de penser que je n' en ai jamais demerité. Des circonstances difficiles, surtout pour moi et mes connoissances a raison des mes diverses fonctions, m' ont jusqu'a present imposé le devoir. pour ma tranquillité et celle de toutes les personnes que j' ai connu dans votre belle patrie de ne correspondre avec aucune; et je serois bien aise d' étre assuré, que des relations qui ne peuvent interésser le Gouvernement, ne soient non plus dans le cas de nuire aux personnes qui ont bien voulu ne pas m' oublier,*

*Veuillez croire, monsieur, aux sentimens distingués de consideration de celui qui a l'honneur d'être.*

*Monsieur, votre très humble et très obeissant serviteur* — Tugny.

*A Monsieur*
*Monsieur Vincent Flauti, professeur de mathématiques, secretaire adjoint de la classe de mathématiques de l'Academie Royale, etc.*

Ma del graziosissimo dono di quel distinto soggetto, della cui amicizia mi teneva grandemente onorato stando in Napoli, per la sua perfettissima morale, e giustizia, non ricevei, che solamente i duc. 300, i quali erano nelle mani del de Cosiron, mentre per gli altri 500 mi dichiarai ben soddisfatto della gentilissima risposta che mi diede sul proposito da Trieste, in data del 20 giugno 1826, quel mio rispettabile concittadino, che n'era depositario, e che lì ritrovavasi.

## DELL' ANALISI ALGEBRICA
## DELLE QUANTITA' DETERMINATE

# PARTE I.

# INDICE

## DE' CAPITOLI, E DELLE MATERIE DELLA PARTE I.


PRELIMINARE ALL' ANALISI ALGEBRICA. *pag.* V—LV

*In esso esponesi brevemente la storia dell'Algebra, e l'occasione, e l'orditura del presente lavoro intorno a questa scienza.*

INTRODUZIONE ALL' ANALISI ALGEBRICA. 1—8 §§. 1—20

Necessità di una maniera generica da indicar sì le quantità *continue*, che le *discrete*. 1— 6
Maniera di risolvere un problema con un ragionamento astratto, detto *Analisi*. 7— 8
Nuova ragione per un' indicazione universale de' numeri: 9
Modo di ciò fare che presentavasi a' moderni; e come potevasi una tale indicazione rilevare dagli Elementi di Euclide. 10— 11
Dimostrazione di Euclide, che: *Due numeri scambievolmente moltiplicandosi danno prodotti uguali*. 12
Indicazione universale de' numeri per mezzo delle lettere dell' alfabeto; 14— 15
Segni per brevemente dinotare le prime quattro operazioni sulle quantità simboliche, e l' *uguaglianza*, o *disuguaglianza* di due quantità. 16— 18
Il problema riportato nel §.7 risoluto in forma simbolica. 19
Differenza tra i risultamenti che ottengonsi dal risolvere un problema aritmeticamente, o con l' Analisi algebrica. 20

LIBRO I. —DELL' ALGORISMO ALGEBRICO.

CAP. I. *Della diversa forma in cui si presentano i monomi algebrici nel calcolo.*

Che cosa sia *coefficiente*: considerazioni sulle quantità $m.x + n.x$, ed $m.x - n.x$ 21— 23
Quale idea debba formasi delle quantità così dette *positive*, e quale delle altre chiamate *negative*: e perchè queste dicansi minori del *zero*. 24— 25
Nota
Cosa sia *esponente*, ed *esponenziale*; e *potenza*, e *radice* di una quantità. . . 26— 27
Che $a^m = a^p \times a^q \times a^r$, ove sia $m = p + q + r$; e che $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. 28— 31
Nota
A chi sono uguali $a^0$, $a^{-m}$, ove $m$ sia un intero, o pure un fratto. 32— 33

CAP. II. — *Conseguenze che traggonsi dalle considerazioni del capitolo precedente.* 16—19

Che la potenza, o la radice di un prodotto, sia quanto il prodotto delle potenze, o delle radici del grado stesso de'fattori di esso. 34

In quali casi, e come possa ridursi un radicale a più semplice espressione. 35

In qual modo una quantità qualunque si elevi ad una data potenza, o da essa estraggasi una data radice. 36— 37

Come riducansi allo stesso indice i radicali d'indice diverso. 38— 40

CAP. III. — *Del segno corrispondente alle quantità algebriche dopo le operazioni aritmetiche che si fanno su di esse, cioè* somma, sottrazione, ec. 20—23

Regole pe' segni nelle soprindicate operazioni. 41— 47

Nota

Origine e natura delle quantità immaginarie. 48

CAP. IV. — *Della diversità che passa tra la natura delle operazioni algebriche, e le analoghe della volgare Aritmetica*, 24—27

Scopo di questo capitolo. 50

Definizione del *monomio*, del *polinomio* e sue diverse specie. 51— 52

Quando due o più termini analitici sieno *simili*, e come si esegua la *contrazione*, o *riduzione* tra essi. 53— 55

Altra essenzial differenza tra le operazioni aritmetiche, e le analoghe dell' Algobra. 56— 58

CAP. V. — *Del calcolo algebrico.* 28 —38

Le regole che qui si danno appartengono in generale alle quantità *razionali*, o *irrazionali*, *intere*, o *fratte*. 59

Della *somma*, e *sottrazione*. 60— 63

Della *moltiplicazione*. 64— 77

Nota al §. 76.

Della *divisione*. 78— 86

Che la quantità $D$, che divide esattamente il prodotto $P$ da' fattori $M$, $N$ debba dividere ancora esattamente l'un di questi. 87

CAP. VI. — *Conseguenze che traggonsi dal precedente capitolo per la riduzione de' fratti.* 39—48

Come si abbia la somma, o la differenza de' fratti di comune denominatore. 88

Riduzione de'fratti di diverso denominatore allo stesso denominatore, o di un intero a fratto di dato denominatore. 89— 92

Definizione del *massimo comun divisore*, e come rinvengasi tra' monomi. 93— 94

Premozioni necessarie alla ricerca del massimo com un di-

| | |
|---|---|
| visore tra i polinomi. | 95— 97 |
| Principii su cui è fondata la ricerca del massimo comun divisore tra i polinomi ; regola per rinvenirlo , ed avvertenze per essa. | 98—102 |
| Nota al §. 98. | |
| Esempi per tal ricerca , ed osservazioni su di essi. | 103—109 |

CAP. VII. — *Delle frazioni continue.* 49—64
Nota.

| | |
|---|---|
| Origine , definizione , e forma delle frazioni continue . | 110—113 |
| Quando avvenga che i termini di una frazione continua , dal secondo in poi , risultino tutti positivi , quando tutti negativi , o pure che si alternino ne' segni . | 114 |
| Che una frazione continua offra un' approssimazione continuata del fratto ordinario ch' essa rappresenta . | 115 |
| Che lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua sia una ricerca analoga a quella del massimo comun divisore : e conseguenze di tali considerazioni , | 116—117 |
| Che la frazione continua in cui svolgesi un fratto ordinario debba esser terminata . | 118—119 |
| Come si passi da una frazione continua al fratto ordinario d' ond' essa è nata , e regola per compor facilmente il numeratore e'l denominatore di questo , anche generalmente dimostrata . | 120—125 |
| Che le frazioni volgari , che pareggiano una frazione continua a diversi gradi di essa sieno irriducibili . | 126—128 |
| Come si svolga un radicale in frazione continua . | 129 |
| Svolgimento di $\sqrt{2}$ in frazione continua , e considerazioni speciali su questa . | 130—132 |
| Che il prodotto di più numeri primi debba esser primo rispetto a quello di altri numeri primi. | 133—135 |
| I quadrati di due numeri primi debbono esser primi tra loro , e similmente le potenze $n$ di essi. | 136 |
| Che un numero non primo debba risultare dal prodotto di numeri primi, o di loro potenze. | 137 |
| Modo di determinare i fattori *semplici*, e *composti* di un numero non primo . | 138 |
| TEOR. *Se la radice di un numero intero non sia un intero , nè tampoco potrà essere un fratto.* | 139 |
| Che la frazione continua che rappresenta un radicale non debba mai terminare ; da cho resta confermata alle quantità radicali la natura d' incommensurabili. | 140—141 |

CAP. VIII. — *De' radicali immaginari , e del loro calcolo .* 65—69

| | |
|---|---|
| Origine e definizione delle quantità immaginarie , e necessità di un calcolo speciale per esse . | 142—146 |
| Operazioni sugl' immaginari . | 147—150 |
| Che da tali operazioni debba sempre risultare un' espressione della forma $A \pm B\sqrt{-1}$. | 151 |

CAP. IX. — *Dell' elevazione a potenza, e dell' estrazione di radice dalle quantità algebriche.* 70—78

Regole per elevare a potenza, e per estrarre la radice da una quantità monomia. | 152—155
Lo stesso pe' polinomi. | 156—157
Composizione del quadrato, e del cubo di un binomio. | 158—160
Due teoremi riguardanti la composizione della potenza $n$ di un polinomio, | 161—163
Si ricava da questi la regola per l' estrazione di radice da' polinomi quadratici, o cubici. — Esempi. | 164—170

CAP. X. — *Delle combinazioni, e permutazioni.* 79—83

Che s' intenda per *accoppiamenti* di più elementi; e quali dicansi *binarii*, quali *ternarii*, ec. Loro distinzione in *combinazioni*, e *permutazioni*. | 171—173
Di $m$ elementi non può formarsene al grado stesso $m$, che una sola combinazione. | 174
Ragionamento per le *combinazioni*, e *permutazioni binarie*, *ternarie* co.di due, tre, ed in generale $m$ elementi. | 175
Formola per le combinazioni binarie di $m$ elementi, per le ternarie, quadernarie, ed in generale al grado $n$. | 176—178
Come risulti modificata la formola degli accoppiamenti, e delle combinazioni nel caso di alcuni elementi identici. | 179
Come quando un numero di elementi sieno tra loro identici, ed un altro numero anche tra loro identici, compiasi o pur no con essi l' intero numero degli elementi. | 180—181
Perchè siensi tralasciate le formole corrispondenti alle permutazioni. | 182

CAP. XI. — *Formola generale dello sviluppo di una potenza qualunque di un binomio.* 84—91

Principii su i quali sono fondate le diverse dimostrazioni di quest' assunto; e specialmente di quella che qui si reca. | 183—184
Forma del prodotto di un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera $x$, pel binomio $x+a$. | 185
Conseguenze di un tal teorema. | 186—187
Forma de' coefficienti del prodotto de' binomi $x+a$, $x+b$, $x+c$, *ec.* | 188
De' segni che debbono corrispondere a' termini di tal prodotto, | 189
Sviluppo della potenza $n$ di $x+a$. | 190
Che in tale sviluppo sieno identici i coefficienti della formola del binomio pel primo ed ultimo termine, e gli equidistanti da essi. | 191
Maniera abbreviata di elevare un binomio ad una potenza intera e positiva. | 192—193
Riduzione del binomio $x+a$ a forma semplicissima, prima di elevarlo a potenza $n$. | 194

CAP. XII. — *Continuazione dello stesso argomento del precedente capitolo.* 92—98

Principii fondamentali e sviluppo della formola $(x + a)^n$, ove $n$ sia un numero qualunque intero o fratto, positivo o negativo. 196—203

CAP. XIII. — *Avvertenze necessarie per convenevolmente sviluppare la potenza di un binomio.* 99—104

Che la serie debba arrestarsi quando la $m$ sia un numero intero positivo; e continuare all' infinito negli altri casi. 204
Come debba apparecchiarsi un binomio, perchè la serie risulti decrescente. 205—206
Come debba apparecchiarsi nel caso di esponente frazionario; perchè non venghino i termini affetti da radicali. 207
Esempi diversi in comprova delle precedenti dottrine. 208—212
Si accenna il metodo di Halley, per estrarre con approssimazione la radice del grado $n$ dalla formola $x^n \pm a$. 213

CAP. XIV. — *Conseguenze che derivansi dal capitolo XII.* 105—106

Formole risultanti dalla somma, o differenza de' due sviluppi della potenza $n$ di $x + a$, e di $x - a$; e forma in cui esse si presentano se $a$ si cambi in $b\sqrt{-1}$. 214—216
Che lo sviluppo di $(a + b\sqrt{-1})$ sia un' espressione della forma $A + B\sqrt{-1}$. 217
Indicazione della maniera di sviluppare in serie una qualunque potenza di un polinomio. 218

LIBRO II. DELLE EQUAZIONI DI I°. E II°. GRADO, E DI ALTRE RICERCHE CHE NE DIPENDONO

CAP. I — *Nozioni preliminari intorno alle equazioni, ed a' problemi.* 107—113

Che s' intende per problema, per *dati* di esso, per *quesito*, e *condizione*. 219—221
In che consista l' artifizio della soluzione algebrica di un problema. 222
Nota.
Che cosa sia *equazione*, e che s' intende per *risolvimento* di essa. 223—224
Problemi che rischiarano le precedenti nozioni. 226—228
Da che deriva la diversità di grado delle quazioni a' problemi che si risolvono. 230
Che s' intende per equazione di *primo, secondo, terzo...n-esimo grado*, e quali di queste si dicano *semplici*, quali *composte*. 231—232
Cosa sia 1°. *membro* di un' equazione, cosa 2°. *membro*; e quando si dica un' equazione *ordinata*, quando *ridotta a zero*; e come si ottenga l' una o l' altra di queste cose. 233—237
Idea adequata di un' equazione ridotta a zero. 238

Che le condizioni ne' problemi possono condurre o ad una equazione, o a più. 239—240
Quali problemi diconsi *determinati*, e quali *indeterminati*. 241—243
Che s' intenda per *Analisi determinata*, che per *indeterminata*. 244
Nota.

CAP. II. — *Maniera di apparecchiare un' equazione* 114.119

Regole per pervenire all' oggetto soprindicato. 247—258
Nota a' §§. 254 e 255. — *Altra* al §. 256.

CAP. III. — *Della maniera di risolvere le equazioni determinate di primo grado.* 120—121 259—262

CAP. IV. — *Del maneggio di più equazioni di primo grado con altrettante incognite, per ottener l'eliminata da quelle.* 122—134

In quali casi risolvendo un problema si perviene a più equazioni con altrettante incognite, 263
Che s' intende per *eliminata*; o condizioni che debbono avere le equazioni d' ond' essa dee derivare. 264—265
Nota.
Metodo per *sostituzione* o di *trasporto*, *e metodo di paragiamento* 267—271
Metodo d' *inserimento*. 272—274
Nota per gli esposti metodi.
Inconveniente che può avvenire in alcuni casi adoperando il metódo d'*inserimento*, e modo di ovviarvi. 275—281
Regola *Bezoutiana* per calcolare tutti una volta, o separatamente i valori delle Incognite, che risultano da altrettante equazioni di 1° grado letterali, o numericho. 282—283
Vantaggi di questa regola, e che essa regge anche quando in ciascuna delle equazioni proposte non sienvi tutte le incognite. — Esempio, 284—286

CAP. V. — *Osservazioni sopra alcuni casi delle eliminazioni.* 135—137

Cosa dinoti lo svanimento di alcuna incognita in qualche *linea*, quando adoperasi per l' eliminazione il metodo del Bezout. 287—288
Nota.
E di che sia indizio il pervenirsi ad equazioni identiche, adoperandovi i metodi esposti ne' §§. 267 a 272; e che indichi lo svanimento di una linea usando la regola del Bezout. 289—291
Nota *pe' due articoli precedenti*.

CAP. VI. — *Considerazioni generali su i problemi, e sul modo di algebricamente risolverli.* 138—145

Che s' intende per *problema algebricamente risoluto*, ed in che sia riposta la risoluzione algebrica de' problemi; co-

me distinguansi questi in grado, e d'onde risulti la maggiore o minore difficoltà dello scioglimento. 293—295

Ciò che debba fare l'analista per risolvere un problema; e quando dal risultamento di esso si ottenga la soluzione di tutti gli altri analoghi. 296—297

Problemi di applicazione per ciò che si è detto ne' due §§. precedenti. 298—308

Cap. VII. — *Risoluzione di alcuni problemi determinati, di 1°. grado.* 146—156

Essere espediente il preferire la soluzione che conduca direttamente all'equazione con una sola incognita. 311—313

Cosa indichi un valor negativo per la $x$, risultante da una equazione di 1° grado. 318—319

Che idea bisogna formarsi di un problema che dia luogo, nel risolverlo, ad una equazione identica. 320—323

Problema di special natura recato dall'Eulero ne'suoi *Elementi di Algebra.* 324—325

Cap. VIII. — *Della determinazione ne' problemi trattati con l'Analisi algebrica.* 157—162

Importanza di questo argomento trascurato nelle istituzioni di Analisi algebrica. 328

Che s'intende per *determinazione* ne' problemi. 329

Nota.

Essa può precedere la loro analisi, o seguirla. 330

Problemi con la respettiva determinazione, e con la dichiarazione de' risultamenti. 331—337

Cap. IX. — *Della risoluzione delle equazioni di 2° grado, e della loro natura.* 163—170

Delle equazioni di 2° grado pure, ed affette, e della maniera di risolverle. 338—343

Nota al §. 338. — *Altra* al §.340.

Regola per esibire le radici di un'equazione di 2°. grado senza maneggiarla. 344

Che il coefficiente del secondo termine in una equazione di 2° grado sia quanto la somma delle due radici di essa, prese col segno contrario; ed il terzo termine quanto il loro prodotto. 345

Le precedenti proprietà per le radici dell'equazioni di 2° grado ricavate direttamente dalla natura di queste. 346—348

Che l'equazione di 2° grado le cui radici sieno $m$, $n$ debba avere per divisori esatti i binomi $x - m$, $x - n$. 349

Della diversa natura delle radici di un'equazione di 2° grado; e maniera di riconoscerla prima di risolvere l'equazione. 350—353

Idea che debbe formarsi delle radici reali, o immaginarie risultanti dal maneggio di un'equazione di 2° grado. 354

Cap. X. — *Un primo sbozzo della natura de' problemi, e come dinotata dalle loro equazioni.* 171—182

# INDICE

## DE' CAPITOLI, E DELLE MATERIE DELLA PARTE I.

PRELIMINARE ALL' ANALISI ALGEBRICA. *pag.* V—LV

In esso esponesi brevemente la storia dell' Algebra, e l' occasione, e l' orditura del presente lavoro intorno a questa scienza.

INTRODUZIONE ALL' ANALISI ALGEBRICA. *1—8* §§.1—20

Necessità di una maniera generica da indicar si le quantità *continue* che le *discrete*. 1— 6

Maniera di risolvere un problema con un ragionamento astratto, detto *Analisi*. 7— 8

Nuova ragione per un' indicazione universale de' numeri. 9

Modo di ciò fare che presentavasi a' moderni; e come potevasi una tale indicazione rilevare dagli Elementi di Euclide. 10— 11

Dimostrazione di Euclide, che: *Due numeri scambievolmente moltiplicandosi danno prodotti uguali.* 12

Indicazione universale de' numeri per mezzo delle lettere dell' alfabeto. 14— 15

Segni per brevemente dinotare le prime quattro operazioni sulle quantità simboliche, e l' *uguaglianza* o *disuguaglianza* di due quantità. 16— 18

Il problema riportato nel §.7 risoluto in forma simbolica. 19

Differenza tra i risultamenti che ottengonsi dal risolvere un problema aritmeticamente, o con l' Analisi algebrica, 20

LIBRO I. — DELL' ALGORISMO ALGEBRICO.

CAP. I. — *Della diversa forma in cui si presentano i monomi algebrici nel calcolo.* *9—15*

Che cosa sia *coefficiente*: considerazioni sulle quantità $m.x + n.x$, ed $m.x - n.x$. 21— 23

Quale idea debba formarsi delle quantità così dette *positive*, e quale delle altre chiamate *negative*: e perchè questo dicansi minori del *zero*. 24— 25

Nota

Cosa sia *esponente*, ed *esponenziale*; e *potenza*, e *radice* di una quantità.. 26— 27

Che $a^m = a^p \times a^q \times a^r$, ove sia $m = p + q + r$, e che $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. 28— 31

Nota

A chi sono uguali $a^0$, $a^{-m}$, ove $m$ sia un intero, o pure un fratto. 32— 33

CAP. II. — *Conseguenze che traggonsi dalle considerazioni*

*del capitolo precedente.* 16—19

Che la potenza, o la radice di un prodotto, sia quanto il prodotto delle potenze, o delle radici del grado stesso de' fattori di esso. 34
In quali casi, e come possa ridursi un radicale a più semplice espressione. 35
In qual modo una quantità qualunque si elevi ad una data potenza, o da essa estraggasi una data radice. 36— 37
Come riducansi allo stesso indice i radicali d'indice diverso. 38— 40

Cap. III — *Del segno corrispondente alle quantità algebriche dopo le operazioni aritmetiche che si fanno su di esse, cioè* somma, sottrazione, ec. 20—23

Regole pe' segni nelle soprindicate operazioni. 41— 47
Nota
Origine e natura delle quantità immaginarie. 48

Cap. IV. — *Della diversità che passa tra la natura dalle operazioni algebriche, e le analoghe della volgare Aritmetica.* 24—27

Scopo di questo capitolo. 50
Definizione del *monomio*, del *polinomio* e sue diverse specie. 51— 52
Quando due o più termini analitici sieno *simili*, e come si esegua la *contrazione*, o *riduzione* tra essi. 53— 55
Altra essenzial differenza tra le operazioni aritmetiche, e le analoghe dell' Algebra. 56— 58

Cap. V. — *Del calcolo algebrico.* 28—38

Le regole che qui si danno appartengono in generale alle quantità *razionali*, o *irrazionali*, *intere*, o *fratte*. 59
Della somma e sottrazione. 60— 63
Della moltiplicazione. 64— 77
Nota al §. 76.
Della divisione. 78— 86
Che la quantità $D$, che divide esattamente il prodotto $P$ da' fattori $M$, $N$ debba divider ancora esattamente l'un di questi. 87

Cap. VI. — *Conseguenze che traggonsi dal precedente capitolo per la riduzione de' fratti.* 39—48

Come si abbia la somma, o la differenza de' fratti di comune denominatore. 88
Riduzione de' fratti di diverso denominatore allo stesso denominatore, e di un intero a fratto di dato denominatore. 89— 92
Definizione del *massimo comun divisore*, e come rinvengasi tra' monomi. 93— 94
Prenozioni necessarie alla ricerca del massimo comun di-

visore tra i polinomi. | 95— 97
Principii su cui è fondata la ricerca del massimo comun divisore tra i polinomi, e regola per rinvenirlo; ed avvertenze per essa. | 98—102
Nota al §. 98.
Esempi per tal ricerca, ed osservazioni su di essi. | 102—108

CAP. VII. — *Delle frazioni continue.* 49—64

Nota
Origine, definizione, e forma delle frazioni continue. | 110—112
Quando avvenga che i termini di una frazione continua, dal secondo in poi, risultino tutti positivi, quando tutti negativi, o pure che si alternino ne' segni. | 114
Che una frazione offra una continuata approssimazione del fratto ordinario ch' essa rappresenta. | 115
Che lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua sia una ricerca analoga a quella del massimo comun divisore, e conseguenze di tale considerazione. | 116—117
Che la frazione continua in cui svolgesi un fratto ordinario debba esser terminata. | 118—119
Come si passi da una frazione continua al fratto ordinario d' ond' essa è nata, e regola per compor facilmente il numeratore e 'l denominatore di questo, anche generalmente dimostrata. | 120—125
Che le frazioni volgari, che pareggiano una frazione continua a diversi gradi di essa sieno irriducibili. | 126—128
Come si svolga un radicale in frazione continua. | 129
Svolgimento di $\sqrt{2}$ in frazione continua, e considerazioni speciali su questa. | 130—132
Che il prodotto di più numeri primi debba esser primo rispetto a quello di altri numeri primi. | 134—135
I quadrati di due numeri primi debbono esser primi tra loro, e similmente le potenze *n* di essi. | 136
Che un numero non primo debba risultare dal prodotto di numeri primi, o di loro potenze. | 137
Modo di determinare i fattori *semplici* e *composti* di un numero non primo | 138
TEOR. *Se la radice di un numero intero non sia un intero, nè tampoco potrà essere un fratto.* | 139
Che la frazione continua che rappresenta un radicale non debba mai terminare; da che resta confermata alle quantità radicali la natura d' incommensurabili. | 134—141

CAP. VIII. — *De' radicali immaginari, e del loro calcolo.* 65—69

Origine e definizione delle quantità immaginarie, e necessità di un calcolo per esse. | 142—145
Operazioni sugl' immaginari. | 146—150
Che da tali operazioni debba sempre risultare un' espres-

sione della forma $A \pm B\sqrt{-1}$. | 151

CAP. IX. — *Dell' elevazione a potenza, e dell' estrazione di radice dalle quantità algebriche.* 70—78

Regola per elevare a potenza, o per estrarre la radice da una quantità monomia. | 153—155
Lo stesso pe' polinomi. | 156—157
Composizione del quadrato, e del cubo di un binomio. | 158—160
Due teoremi riguardanti la composizione della potenza *n* di un polinomio. | 161—163
Si ricava da questi la regola per l' estrazione di radice da' polinomi quadratici, o cubici—Esempi. | 164—170

CAP. X. — *Delle combinazioni, e permutazioni.* 79—83

Che s' intenda per *combinazioni* di più elementi, che per *permutazioni*; e quali dicansi *binarie*, quali *ternarie*, *ec.* | 171—174
Di *m* elementi non può formarsene al grado stesso *m*, che una sola combinazione. | 176
Formola per le combinazioni e permutazioni di *m* elementi al grado stesso *m*. | 178
Nota
PROBL. I. — *Determinare il numero delle combinazioni e permutazioni binarie di m elementi; o pure quelle delle une, e delle altre.* | 179
PROBL. II. — *Esibire il numero delle combinazioni e permutazioni ternarie, e quello delle sole combinazioni di m elementi.* | 180
Formola per le combinazioni, e permutazioni binarie, ternarie *ec.* fino al grado *n* di *m* elementi, o pur delle une e delle altre separatamente. | 181

CAP. XI. — *Formola generale dello sviluppo di una potenza qualunque di un binomio.* 84—91

Principii su i quali sono fondate le diverse dimostrazioni di quest' assunto; e specialmente di quella che qui si reca. | 183—184
Forma del prodotto di un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera $x$, pel binomio $x+a$. | 185
Conseguenze di un tal teorema. | 186—187
Forma de' coefficienti del prodotto de' binomi $x+a$, $x+b$ $x+c$, *ec.* | 188
De' segni che debbono affettare i termini di tal prodotto, | 189
Sviluppo della potenza *n* di $x+a$. | 190
Che in tale sviluppo sieno identici i coefficienti della formola del binomio pel primo ed ultimo termine, e gli equidistanti da essi, | 191
Maniera abbreviata di elevare un binomio ad una potenza intera e positiva. | 192—193
Riduzione del binomio $x+a$ a forma semplicissima, prima di elevarlo a potenza *n*. | 194

CAP. XII. — *Continuazione dello stesso argomento del pre-*

*cedente capitolo.* 92—98

Sviluppo della formola $(x+a)^n$, ove $n$ sia un numero qualunque intero, o fratto, positivo, o negativo. 196—202

CAP. XIII. — *Avvertenze necessarie per convenevolmente sviluppare la potenza di un binomio.* 99—104

Che la serie debba arrestarsi quando la $m$ sia un numero intero positivo; e continuare all' infinito negli altri casi. 204
Come debba apparecchiarsi un binomio, perchè la serie risulti decrescente. 205—206
Come debba apparecchiarsi nel caso di esponente frazionario, perchè non venghino i termini affetti da radicali 207
Esempi diversi in comprova delle precedenti dottrine. 208—212
Si accenna il metodo di Halley, per estrarre con approssimazione la radice del grado $n$ dalla formola $x^n \pm a$. 213

CAP. XIV. — *Conseguenze che derivansi dal capitolo XII.* 105—106

Formole risultanti dalla somma o differenza de' due sviluppi della potenza $n$ di $x+a$, e di $x-a$: e forma in cui esse si presentano se $a$ si cambii in $b\sqrt{-1}$. 214—216
Che lo sviluppo di $(a+b\sqrt{-1})^n$ sia un' espressione della forma $A+B\sqrt{-1}$. 217
Indicazione della maniera di sviluppare in serie una qualunque potenza di un polinomio. 218

LIBRO II. — DELLE EQUAZIONI DI I° E II° GRADO, E DI ALTRE RICERCHE CHE NE DIPENDONO.

CAP. I. — *Nozioni preliminari intorno alle equazioni, ed a' problemi.* 107—113

Che s' intende per problema, per *dati* di esso, per *quesito*, e *condizione*. 219—221
In che consista l' artifizio della soluzione algebrica di un problema. 222
Nota.
Che cosa sia *equazione*, e che s' intenda per *risolvimento* di essa. 223—224
Problemi che rischiarano le precedenti nozioni. 226—228
Da che deriva la diversità di grado delle equazioni a' problemi che si risolvono. 230
Che s' intende per equazione di *primo, secondo, terzo... n-esimo grado*, e quali di queste si dicano *semplici*, quali *composte*. 231—232
Cosa sia *1° membro* di un' equazione, cosa *2° membro*; e quando si dica un' equazione *ordinata*, quando *ridotta a zero*; e come si ottenga l' una o l' altra di queste cose. 233—237
Vera idea di un' equazione ridotta a zero. 238
Che le condizioni ne' problemi possono condurre o ad

| | |
|---|---|
| una equazione, o a più. Quali problemi diconsi *determinati*, e quali *indeterminati*. | 239—240 |
| Che s' intenda per *Analisi determinata*, che per l' *indeterminata*. Nota. | 241—244 |
| CAP. II.—*Maniera di apparecchiare un' equazione.114-119* | |
| Regole per pervenire all' oggetto sopridicato. Nota a' §§. 254 e 255.—*Altra* al §. 256. | 247—258 |
| CAP. III. — *Della maniera di risolvere le equazioni determinate di primo grado.* *120—121* | 259—262 |
| CAP. IV. — *Del maneggiamento di più equazioni di primo grado con altrettante incognite, per ottener l' eliminata da quelle* *122—134* | |
| In quali casi risolvendo un problema si perviene a più equazioni con altrettante incognite. | 263 |
| Che s' intende per *eliminata*; e condizioni che debbono avere le equazioni d' ond' essa dee derivare. Nota | 264—265 |
| Metodo di *sostituzione* o di *trasporto*, e *metodo di pareggiamento*: | 267—271 |
| Metodo d' *inserimento*. Nota per gli esposti metodi. | 272—274 |
| Inconvenionte del metodo d' *inserimento*, e modo di ovviarvi. | 275—281 |
| Regola *Bezoutiana* per calcolare tutti una volta, o separatamente i valori delle incognite, che risultano da altrettante equazioni di 1° grado letterali o numeriche. | 282—283 |
| Vantaggi di questa regola, e che essa regge anche quando in ciascuna delle equazioni proposte non sienvi tutte le incognite. — Esempio. | 284—286 |
| CAP. V. — *Osservazioni sopra alcuni casi delle eliminazioni.* *135—137* | |
| Cosa dinoti lo svanimento di alcuna incognita in qualche *linea*, quando adoperasi per l' eliminaz. il metodo del Bezout. Nota. | 287—289 |
| E di che sia indizio il pervenirsi ad equazioni identiche, adoperandovi i metodi esposti ne' §§. 256-261. Nota *pe' due articoli precedenti.* | 291 |
| CAP. VI. — *Considerazioni generali su i problemi, e sul modo di algebricamente risolverli.* *138—145* | |
| Che s' intende per *problema algebricamente risoluto*, ed in che sia riposta la risoluzione algebrica de' problemi; come distinguansi questi in grado, e d' onde risulti la maggiore o minore difficoltà dello scioglimento. | 293—295 |

| | |
|---|---|
| Ciò che debba fare l'analista per risolvere un problema; e quando dal risultamento di esso si ottenga la soluzione di tutti gli altri analoghi. | 296—297 |
| Problemi di applicazione per ciò che si è detto ne' due §§. precedenti. | 298—308 |
| CAP. VII. — *Risoluzione di alcuni problemi determinati, di 1° grado.* 146—156 | |
| Che sia espediente il preferire la soluzione che conduca direttamente all'equazione con una sola incognita. | 311—313 |
| Cosa indichi un valor negativo per la $x$, risultante da un equazione di 1° grado. | 318—319 |
| Che idea bisogna formarsi di un problema che dia luogo, nel risolverlo, ad una equazione identica. | 320—323 |
| Problema di special natura recato dall' Eulero ne' suoi *Elementi di Algebra.* | 324—325 |
| CAP. VIII. — *Della determinazione ne' problemi trattati con l'Analisi algebrica.* 157—162 | |
| Importanza di questo argomento trascurato nelle istituzioni di Analisi algebrica. | 328 |
| Che s'intende per *determinazione* ne' problemi. | 329 |
| Nota | |
| Essa può precedere la loro analisi, o seguirla. | 330 |
| Problemi con la respettiva determinazione, e con la dichiarazione de' risultamenti. | 331—337 |
| CAP. IX. — *Della risoluzione delle equazioni di 2° grado e della loro natura.* 163—170 | |
| Delle equazioni di 2° grado pure, ed affette, e della maniera di risolverle. | 338—343 |
| Nota al §.338.—*Altra* al §. 340. | |
| Regola per esibire le radici di un' equazione di 2° grado senza maneggiarla. | 344 |
| Che il coefficiente del secondo termine in una equazione di 2° grado sia quanto la somma delle due radici di essa, prese col segno contrario; ed il terzo termine quanto il loro prodotto. | 345 |
| Le precedenti proprietà per le radici dell' equazione di 2° grado ricavate direttamente dalla natura di questa. | 346—348 |
| Che l' equazione di 2° grado le cui radici sieno $m$, $n$ debba aver per divisori esatti i binomi $x-m$, $x-n$. | 349 |
| Della diversa natura delle radici di un' equazione di 2° grado, e maniera di conoscerle prima di risolvere l' equazione. | 350—353 |
| Idea che debbe formarsi delle radici reali, o immaginarie, risultanti dal maneggio di un' equazione di 2° grado. | 354 |
| CAP. X. — *Un primo sbozzo della natura de' problemi, e come dinotata dalle loro equazioni.* 171—182 | |

| | |
|---|---|
| Si espongono tre problemi per rischiarare il suddetto argomento. | 356—363 |
| Si reca la soluzione di un altro problema per ricavarne la regola del modo da trasformare un problema, per veder l'uso della radice negativa, che risulti dal risolvere l'equaz. ed esso. | 364—367 |
| In quali casi convenga rigettare assolutamente la radice negativa ne' problemi aritmetici. | 368 |
| Ciò che indichi l'impossibilità assoluta in un problema del 2° grado, e come si possa trasformarlo per renderlo possibile. | 370 |
| Nota | |
| **Cap. XI.** — *Alcuni problemi aritmetici di 2° grado.* *183—191* | |
| Si confermano con essi le dottrine già stabilite nel precedente capitolo, per le radici delle equazioni di 2° grado, e pe' problemi d'ondo sono derivate. | 372—384 |
| Dimostrazione della formola di Halley di cui è stato detto nel §. 213 | 385—386 |
| **Cap. XII.** — *Delle equazioni biquadratiche.* *192—199* | |
| Definizione di esse, e loro forma del tutto analoga a quello del 2° grado. | 387 |
| Nota | |
| Modo di risolverle analogo a quello tenuto per queste; e discussione delle quattro radici che ne risultano. | 388—393 |
| Maniera un poco diversa per risolvere tali equazioni. | 394—395 |
| Come in tali equazioni sia composto il coefficiente della $x^2$ dalle quattro radici di essa, e come il termine noto. | 396 |
| Problemi di esercizio, o di chiarimento alle dottrine precedentemente esposte. | 397—405 |
| **Cap. XIII.** — *Dell' estrazione di radice da' binomi.* *200—203* | |
| Nota | |
| Cosa si debba qui intendere per binomio, motivi di aver qui riportata questa trattazione, che dovrà esser generalmente esposta in appresso. | 406—407 |
| Che $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$ debba esser generalmente della forma $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$; e regola per conoscer quando, e come da quel binomio si possa pervenire a questo, illustrata con esempi. | 408—412 |
| **Cap. XIV.** — *Della proporzione e progressione aritmetica* *204—212* | |
| Prime nozioni su tale argomento. | 413—418 |
| Deduzioni da esse per ottenere il *termine generale*, o il *sommatorio* di una progressione aritmetica, datone il primo termine, la differenza, e 'l numero de' termini. | 419—422 |
| Esposizione di tutte le formole per dedurre da tre de' cinque *elementi* che concorrono in una progressione aritmetica gli altri due. | 423 |

| | |
|---|---|
| Alcuni teoremi utili che possonsi ricavare dalle anzidette formole. | 425—428 |
| Alcuni problemi per l' applicazione delle formole precedenti, ad esercizio de' giovani. | 429—433 |
| CAP. XV. — *De' numeri figurati.* 213—226 | |
| Nota | |
| Definizione per tali numeri, ed oggetto delle ricerche su di essi. | 434—435 |
| Definizione del *termine generale*, e del *sommatorio* di una serie. | 436—437 |
| Definizione de'numeri poligoni e distinzione di essi in diverse specie, e come ottengansi. | 438—440 |
| Che la differenza della progressione aritmetica, da cui derivinsi numeri poligoni di una data specie, dinoti il numero de' triangoli in cui la figura corrispondente a tal numero poligono può considerarsi divisa. | 441 |
| Forma del termine generale per una qualunque serie di numeri poligoni, ed in ispecie per ciascuna di esse. Come per mezzo di esso pervengasi ad ottenere il numero poligouo di specie data, e di un *lato* dato. | 442—443 |
| Si risolve il problema inverso del precedente, cioè di assegnare il lato di un dato numero poligono | 444—447 |
| Che *ogni numero triangolare preso 8 volte, ed accresciuto di 1 sia un numero quadrato.* | 445 |
| Che *ogni numero pentagonale preso 24 volte ed accresciuto di 1 sia un numero quadrato impare, la cui radice accresciuta di 1 è un moltiplice di 6.* | 447—448 |
| Formola generale pel lato di un numero poligono. | 449 |
| Determinazione del termine sommatorio di ciascuna serie di numeri poligoni, ed in ispecie pe' *triangolari*, *quadrati*, *pentagonali . . . . n-agonali.* | 450—452 |
| Definizione de' numeri *piramidali*, maniera propria da denominarli, per distinguere la loro specie. | 453—455 |
| Termine generale, e sommatorio delle serie de' numeri piramidali. | 456—458 |
| De'numeri *ordinali* in generale, e del loro termine generale, | 459—464 |
| CAP. XVI. — *Delle ragioni, proporzioni, e progressioni geometriche.* 227—236 | |
| Nota | |
| Definizione della ragione geometrica, e chè la teorica di essa debba esser connessa col libro V. di Euclide. | 466—467 |
| Definizione della proporzione geometrica e distinzione di essa in due specie, e come ottengansi il quarto, il terzo, ed il medio proporzionale. | 468—470 |
| Principio fondamentale per la proporzione geometrica tra quattro o tre grandezze, e teoremi per la *trasformazione* di una proporzione. | 471—473 |
| Della ragion composta, e delle particolari specie di essa. | 474—476 |
| Teoremi importanti sulla ragion composta. | 477—479 |

Definizione della progressione geometrica, e proprietà di essa, da cui ne deriva facilmente l'esibizione del termine generale, e del sommatorio. 480—483
Formole per la determinazione di due de' cinque *elementi* che consideransi in una progressione geometrica, dati gli altri tre. 484
Saggio dell'uso vantaggioso di tali formole nella soluzione di alcuni problemi, che vengono recati. 485—488
Nota al §. 488.

CAP. XVII. — *Prime nozioni su i logaritmi, specialmente de' volgari*. 237—247

Che una qualunque progressione geometrica può ridursi a quella delle potenze successive della ragione di essa, a cominciar dalla potenza *zero*, moltiplicata per una data quantità. 489
Definizione de' logaritmi per una data base; e che quello dell'unità, per qualunque sia questa, è sempre *zero*. 490—491
Che il log-mo di una frazione vera sia negativo. 492
Indicazione del modo di prima costruzione delle tavole logaritmiche, pel sistema della base 10. 493—495
Che dicesi *caratteristica* di un log-mo, e che *mantissa*; e che nel sistema volgare i numeri abbiano la caratteristica del loro log-mo di tante unità quante sono le cifre di cui costa il numero meno uno. 496—497
Che il log-mo del prodotto risulti dalla somma de' log-mi de' fattori; e quello del quoziente dalla loro differenza. E però il log-mo della potenza $n$ di un numero sia quanto quello della radice presa $n$ volte; e *viceversa* il log-mo della radice $n$ sia quanto quello della potenza diviso per l'indice della radice. 498
Che le mantisse de' log-mi sieno convenevolmente espresse in decimali; e che i numeri rappresentati dalla stessa cifra con de' zeri in fine di essi abbiano ad avere la stessa mantissa, variando solamente nella caratteristica. 500—501
Che i log-mi de' numeri prossimi l'un l'altro si minorino in differenza a misura che si fanno maggiori i numeri; o ciò costituisce il fondamento per la ricerca de' numeri corrispondenti a' log-mi, che non rinvengonsi esattamente nelle tavole. 502—503
Del *complemento aritmetico*, e suo uso vantaggioso: ciò che convenga fare ne' risulamenti del calcolo ove siasene fatto uso; ed avvertenza necessaria per questi. 504—511
Per costruir le tavole logaritmiche basta assegnar solo quelli de' numeri *primi*. 512
Usi del calcolo logaritmico nella comune Aritmetica. 513—515
Usi di un tal calcolo nel maneggio di alcune equazioni. 516

CAP. XVIII. — *Esercizio di problemi la cui soluzione ottiensi dalle formole stabilite ne' tre precedenti capitoli*. 248—256

Problemi diversi d'interesse composto, ed altri che risolvonsi con le stesse formole. 519—528
Nota a' cap. XVII e XVIII.

# INTRODUZIONE

ALL'

# ANALISI ALGEBRICA

1. Chiunque abbia appena gustati i principj della volgare Aritmetica e della Geometria conosce la distinzione delle grandezze in *continue* e *discrete*, e sa pur bene che a dinotar queste vi si adoperi un numero, mentre per esprimere le prime si ricorre ad una delle tre diverse specie di estensione. Nè dee ignorare, che l'ordinaria pratica del misurare esige, che le quantità continue si concepiscano ridotte a discrete, col fissarvi per unità di convenzione una parte determinata di esse.

2. Potendosi dunque per tal modo ogni quantità continua concepir ridotta a discreta, si vede bene che l'una e l'altra possa esser suscettiva di una medesima rappresentazione, sicchè le proprietà comuni ad esse, che sono quelle del loro rapporto, possan dimostrarsi generalmente appartenere all'una ed all'altra. Adunque per questa parte si comprende la necessità di un modo da indicare universalmente le grandezze, cioè tale che valga ad esprimere egualmente la quantità continua e la discreta.

3. Finalmente anche considerando le quantità discrete assolutamente, esse sono dotate di proprietà generali, le quali non già a determinati numeri appartengono, ma sono comuni a tutti gl' infiniti numeri ne' quali abbian luogo le stesse condizioni; e di ciò non pochi esempi offre Euclide ne' suoi tre libri delle quantità *commensurabili*, che sono ordinariamente il VII°, l' VIII° e 'l IX° degli Elementi [1].

[1] Veggasi intorno a questi libri ciò che si è detto nel *Discorso preliminare agli Elementi di Euclide*.

4. Così quando egli dice, che : *Ogni numero minore è parte , o parti di ogni altro maggiore* (*pr.*4.VII.) — *I due prodotti che risultano da due numeri, moltiplicandoli vicendevolmente l' un per l' altro , sono uguali fra loro* (*pr.*16.VII.) — *I numeri piani sono fra loro in ragion composta dai lati* [*], *ec.* ognun vede chiaramente , che tali proprietà non si appartengano già a numeri determinati , ma a tutti in generale ; che perciò col dimostrarle contrassegnando i numeri su i quali si fa la dimostrazione con le cifre ordinarie dell' Aritmetica , non si conseguirebbe l' intento di render tali dimostrazioni generali, come si richiede. Aggiungasi a ciò , che tutti que' problemi aritmetici , che hanno le stesse condizioni [1] , ma variano solamente nel valore de' numeri a' quali queste sono applicate, debbono essere risoluti nel modo stesso ; che perciò tutt' i numeri indicanti i risultamenti a' quali risolvendoli si perviene , dovendo esser determinati colle stesse operazioni di Aritmetica , si potrebbe facilmente da un risultamento solo ottenerli tutti , allorchè i numeri dati si contrassegnassero universalmente .

5. E per render ciò più chiaro con un esempio , sia proposto a :

*Dividere un numero dato in due parti , l' una delle quali ecceda di un dato numero l' altra.*

Questo problema potrà esser risoluto per mezzo dell' Aritmetica , e per l' ovvia *regola del falso* , allorchè suppongasi , per esempio , il dato numero esser 100, e l' eccesso dell' una parte sull' altra esser 16 ; ed in tal caso la soluzione di esso ci farà pervenire ad un risultamento, che soddisfa

—

[*] Prop.5. lib.VIII.—Qui intendo per *numeri piani* il prodotto di due numeri , ciascun de' quali n' è detto *lato* ( *def.16. VII.* ) . E ciò uniformandosi all' enunciazione della 23. VI. cui la presente è analoga .

[1] Il rapporto che lega in un problema l' incognita con le quantità note del medesimo, dicesi *condizione del problema*.

a questo caso solamente ; in modo tale che se restando similmente cnunciato il problema , si cambiino i numeri dati , e che la somma data si supponga esser 120 , e l' eccesso 24 , vi sarà bisogno , per determinar le parti cercate in quest' altro caso , di ripigliar nuovamente la soluzione del problema , come se non mai fosse stato di già risoluto. Vale a dire , che il precedente risultamento niente può influire alla determinazione di questa seconda ricerca , la quale non differisce in altro dalla prima , che nel solo valore de' dati.

6. Or , com' è chiaro , tutt' i problemi che sono proposti su grandezze diverse in quantità solamente,ma colle stesse condizioni , rappresentano un problema solo generale , la cui risoluzione, convenevolmente fatta , dee offrir benanche un risultamento generale, il qual comprenda in se tutti quei risultamenti particolari , che si otterrebbero per mezzo delle aritmetiche ricerche . Ed ecco qual sarebbe una tal soluzione pel problema poc' anzi proposto.

7. » Il numero dato dovendo pareggiare le due parti in » cui esso vuole dividersi , e di queste la maggiore essendo » quanto la minore più la differenza tra esse , ne segue per» ciò , che il numero dato sia quanto il doppio della parte » minore più una tal differenza.Laonde tolta di comune que» sta differenza si troverà , che il numero dato meno la dif» ferenza data delle due parti in cui vuol dividersi , sia » quanto il doppio della parte minore ; e quindi la sola par» te minore sarà uguale alla metà del numero dato a divide» re meno la metà della data differenza «.

8. Dal qual risultamento si rileva in generale , che :

*Qualunque sia il numero dato a dividere, e qualunque l' eccesso di una parte sull' altra , si otterrà sempre la parte minore sottraendo dal dato numero la data differenza , e dividendo il residuo per 2.*

E questa specie di ragionamento astratto , col quale generalmente dalle grandezze note di un problema , per mezzo

delle sue condizioni se ne derivano le incognite, si dice *analisi* del problema.

9. Ciò premesso, se tutt' i problemi proposti su i numeri fossero suscettivi per la loro soluzione di un'analisi così breve, e di passaggi sì semplici e facili a ritenersi, ed a combinarsi fra loro a memoria, ciascun di essi potrebbe risolversi nel modo poc' anzi detto, e si otterrebbero così per essi taluni risultamenti astratti ed enunciativi, per mezzo de' quali si avrebbe la soluzione particolare in ciascun caso, ove s' individuino i numeri dati. Ma non va la cosa sempre in tal modo; ed il più delle volte la soluzione di un problema non può condursi a fine senza aver sotto gli occhi le quantità sulle quali si propone ad operare, e le operazioni che si sono già fatte sopra di esse, e colle quali sono connesse le altre, che debbono ancora farsi per pervenire al risultamento; e di ciò molti esempi si vedranno in appresso. Come far dunque in simili casi? Egli è chiaro, che il solo mezzo da riuscire sia quello di ritrovare un modo da esprimere astrattamente e generalmente i numeri dati, e le operazioni a farvi sopra.

10. Or questo modo, che riesciva difficile ad escogitarsi da' matematici greci, diveniva facilissimo per gli arabi, da' quali Lionardo Pisano apprese la scienza dell' Algebra, e fecela conoscere in Italia, appena cominciando il secolo XIII; che anzi costoro potevano rilevare il tipo di questa indicazione generale delle quantità dalle opere stesse de' greci. Ed ecco in qual modo.

11. Questi servironsi, per dinotare i numeri nella loro Aritmetica, delle lettere del loro alfabeto; che perciò dovettero escluderle da un' indicazione universale de' numeri: ciò non ostante, allorchè ebbero bisogno di esprimere non già numeri determinati ma universali, ricorsero all' espediente di servirsi delle lettere majuscole del loro alfabeto, affiggendo ad ognuna di esse una lineetta, e formando come una figura. E solamente allorchè dovevano farsi talune o-

perazioni su questi numeri generalmente indicati, e che si esigesse di esprimerne o somma con altri, o pur differenza, a fine di restringere il loro ragionamento, disegnarono la linea indicante il numero con due lettere; ed indicarono con due lettere, anche postevi negli estremi, le parti di esse. Di che moltissimi esempi offrono i soprindicati libri aritmetici di Euclide, da' quali, per dilucidazione di ciò che si è detto, prenderemo a qui esporre la seguente:

PROP. XVI. DEL LIBRO VII. DI EUCLIDE.

12. *Sono uguali i prodotti che risultano da due numeri scambievolmente moltiplicandoli.*

E____

A__________

B______________

C________________________

D______________________________

Dim. Sieno i due numeri A, B; ed A moltiplicando B dia C; B poi moltiplicando A faccia D: dico esser C uguale a D.

Perchè A moltiplicando B produce C; B dovrà misurare C per le unità che si contengono in A [4]. Ma l' unità E misura il numero A per le unità in questo contenute. Adunque l' unità E misura tante volte il numero A, quante volte B misura C; per lo che, permutando, l' unità E misura ugualmente il numero B che A misura C [5]. Di nuovo, poichè B moltiplicando A ha fatto D, A misurerà D per le u-

---

[4] Ciò è chiaro dall' ovvia definizione della moltiplicazione, che l' *unità debba stare all' un de' fattori, come l' altro fattore al prodotto.*

[5] Ciò vien dimostrato da Euclide nella prop. prec. a quella qui recata; e può anche ripetersi dalle prop. 16 e C *El. V. ediz. nostra.*

nità che si contengono in B. Ma anche E misurava B per le unità che sono in esso. Adunque l' unità E misura il numero B ugualmente che A misura D. E siccome l' unità E misurava in numero B ugualmente che A, C; perciò A misura lo stesso numero di volte C che D. Quindi questi prodotti sono fra loro uguali [6] — *C. B. D.*

13. Ed esempi simili al recato incontransi nel lib. V. degli Elementi, ove le grandezze in generale, si discrete che continue, indicansi universalmente con lettere, affiggendo ad esse, per la ragione già detta, una lineetta.

14. Adunque gli arabi i quali avevan già una nuova indicazione pe' numeri [7], non avrebbero dovuto durar molta fatica a vedere, che le lettere dell' alfabeto potevano convenevolmente adottarsi per caratteri universali delle grandezze, qualunque si fosse la loro natura; e ciò che essi non avvertirono fu in seguito cominciato ad introdurre nel calcolo dagl' italiani [8]; sicchè finalmente ebbe luogo la seguente

### Regola fondamentale

15. *I numeri, come anche le grandezze continue, s' indicano generalmente per le lettere piccole dell' alfabeto.*

E per una maggior distinzione si è stabilito, che le ultime di queste cioè $x$, $y$, $z$, $t$, $u$ indichino le *ignote*, e le rimanenti altre le *note* de' problemi.

16. Or siccome le quantità così generalmente indicate, debbono condurre ne' calcoli che istituisconsi con esse a risultamenti universali, non potendosi effettuar calcolo se non per numeri, ne segue che le operazioni aritmetiche per le quantità dinotate con lettere non debbano consistere in altro, che in

—

[6] Dimostrato che si è AB = BA, da ciò subito rilevasi ABC = CAB = ACB = BCA; ed in generale che comunque si varii l' ordine de' fattori, rimanga sempre lo stesso il prodotto.

[7] Le ordinarie cifre della nostra Aritmetica volgare.

[8] Veg. il *discorso preliminare*.

semplici indicazioni di esse, da eseguirsi poi effettivamente, allorchè ne' casi particolari si saranno sostituite alle quantità espresse letteralmente i numeri che loro corrispondono.

17. Ciò posto, per esprimere con brevità le operazioni da farsi sulle grandezze letteralmente dinotate, e talune altre relazioni tra esse, adottaronsi alcuni segni, che andremo qui appresso dinotando. Per la somma fu adottato il segno $+$ (*più*), che si scrive tra le quantità da sommarsi. Così $a+b$ dinota la somma di $a$ con $b$, e si pronuncia *a più b*.

Per la sottrazione si è stabilito il segno $-$ (*meno*), che dinota che la quantità espressa dalla lettera cui esso è prefisso deve sottrarsi dall' altra che precede un tal segno. Così $a-b$ dinota che da $a$ dee sottrarsi $b$, e si pronuncia *a meno b*.

Il prodotto di $a$ per $b$ s' indica con $ab$; ed in generale il prodotto di più lettere s' indica col loro accozzamento: così $abc$ dinota il prodotto delle tre quantità espresse da $a$, $b$, $c$. E questo prodotto si suole anche esprimere nel seguente altro modo $a\times b\times c$, servendosi del segno $\times$, ch' è quello della moltiplicazione, ed allora si direbbe *a moltiplicata per b*, *moltiplicata per c*. E potrebbesi a tal segno $\times$ sostituire anche un *punto* nella seguente maniera $a.b$. Ma la più usata e comoda maniera è quella detta in primo luogo.

Finalmente la divisione di $a$ per $b$ s' indica per $a:b$, o per $\frac{a}{b}$, ciascun de' quali modi dinota il quoziente di $a$ per $b$, e si pronunzia *a divisa per b*. Ed a quel secondo modo d' indicar la divisione si dà anche il nome di *frazione*, chiamandosi, come nella volgare Aritmetica *numeratore* la quantità ch' è sulla lineetta orizzontale, e che faceva da dividendo, e *denominatore* quella che sta sotto tal linea, e che faceva da divisore; e ciascun di questi dicesi termine della frazione.

18. Oltre a questi segni, per esprimere le principali operazioni aritmetiche da istituirsi sulle quantità letterali, è necessario anche avvertire, che l' uguaglianza fra due quanti-

tà dinotasi col segno $=$ posto fra esse, che si pronunzia *uguale*, così $a = b$ significa *a uguale* a $b$.

L' altro segno $>$ posto tra due quantità dinota esser la prima maggiore della seconda, così $a > b$ significa *a maggiore* di $b$; e lo stesso segno rivolto col vertice dell'angolo che lo rappresenta verso la prima quantità, nel seguente modo $a < b$, dinota essere *a minore* di $b$.

19. Ciò premesso, se nel problema trattato nel §. 7. si esprima per $a$ il numero dato a dividere, e per $b$ l' eccesso della parte maggiore di esso sulla minore ignota, che dicasi $x$; per la condizione del problema sarà la parte maggiore espressa da $x + b$; e quindi sarà

$$a = x + x + b$$

cioè $a$ sarà uguale al doppio di $x$ più $b$, o sia sarà

$$a = 2x + b.$$

Quindi togliendo di comune $b$ avrassi

$$2x = a - b.$$

E finalmente $$x = \frac{a - b}{2}.$$

Ed in questo caso l' *analisi* del problema, che differisce da quella astratta del §. citato, solamente perchè in questa i passaggi, ed il risultamento sono simbolicamente espressi, si dirà *algebrica*. Nè vi sarà problema aritmetico, che non possa essere in questa maniera risoluto.

20. Il risultamento poc' anzi ottenuto, cioè l' *espressione* $x = \frac{a-b}{2}$, serve anche a rischiarare ciò che fu detto nel §. 16. Imperocchè si vede da esso, che non resti determinato definitivamente quel numero $x$; ma solamente si abbia indicato il sistema delle operazioni che debbon farsi per ottenerlo, allorchè per $a$, $b$ si sostituiscano que' numeri che si vuole.

# LIBRO PRIMO.

## DELL' ALGORISMO * ALGEBRICO

## CAPITOLO I.

### Della diversa forma in cui si presentano i monomi algebrici nel calcolo.

21. Nella regola al §. 15. è stato già detto, che una grandezza sia continua, sia discreta s' indichi generalmente con una lettera dell' alfabeto; ma una volta che siasi ciò fatto, il modo proprio da esprimere un qualunque moltiplice o summoltiplice di essa è quello di prefiggervi il numero intero o fratto che esprime un tal moltiplice. Così indicata per $a$ una grandezza, ne sarà $2a$ il doppio, $3a$ il triplo ... ed in generale $m.a$ il moltiplice $m$ ( indicando con $m$ un qualunque numero intero ). Come al contrario ne dinoterà $\frac{1}{2}a$ la metà, $\frac{1}{3}a$ la terza parte ... ed in generale $\frac{m}{p}a$ la parte $p$ del suo moltiplice $m$ ( indicando ancor $p$ un altro numero qualunque ). E questo numero intero o fratto che prefiggesi ad una quantità letteralmente espressa per rappresentarne un moltiplice, o summoltiplice dicesi *coeffi ciente* di essa.

22. Ciò posto, indicando $m.a + n.a$ la somma di due grandezze (17), o piuttosto di una stessa grandezza $a$ presa $m$ volte, ed $n$ volte, è chiaro che tal somma equivalga alla $a$ presa $m + n$ volte; sicchè essendo $m + n = q$, avrassi

* Con la denominazione *Algorismo* dinotasi quella parte dell' *Analisi algebrica*, che espone le regole del calcolo delle grandezze simbolicamente espresse.

$$m.a + n.a = q.a$$

E similmente si rileverà dover essere

$$m.a - n.a = r.a$$

supponendo $m - n = r$.

23. Trattandosi di sottrarre $n.a$ da $m.a$ è chiaro che possano accader tre casi: 1° che $m$ sia un numero maggiore di $n$. 2° che $m$ sia uguale ad $n$; e 3° che $m$ sia minore di $n$. Nel primo caso, supponendo $m$ maggiore di $n$ per quanto è $p$, cioè $m = n + p$, è ancor chiaro, che la quantità $m.a$ si ridurrà [1] ad $(n + p)\, a$, cioè [2] ad $n.a + p.a$; e quindi che $m.a - n.a$ sia quanto $n.a + p.a - n.a$, cioè quanto $+p.a$, distruggendosi fra loro $na$ e $-na$. Supponendosi in secondo luogo, che $m$ pareggi $n$, anche $m.a$ adeguerà $n.a$; e quindi la differenza loro $m.a - n.a$ sarà *zero*. Finalmente se la $m$ sia superata dalla $n$ per $p$, cioè che sia $n = m + p$, si vedrà, come nel primo caso, che la quantità $m.a - n.a$ si riduca ad $m.a - m.a - p.a$, cioè a $- p.a$. Adunque sottraendo la quantità $n.a$ dalla $m.a$ se $n$ è minore di $m$ per $p$ il risultamento è $+ p.a$; esso è *zero* in caso di $m = n$; ed è $- p.a$ nel caso di $m$ minore di $n$ per $p$.

24. Or i primi risultamenti, cioè quelli che nascono da una quantità minore sottratta da un'altra maggiore, ed a' quali, come dalla stessa operazione si rileva, compete il segno $+$, si dicono *positivi*, per distinguerli dagli ultimi, in cui l' operazione medesima dimostra che dee competer loro il segno $-$, e che diconsi *negativi*.

25. Ecco dunque l'origine algebrica delle quantità isolate

---

[1] Quel vincolo (      ) è il segno che si adopra più comunemente dagli analisti, per dinotare che tutta la quantità $n + p$ è il coefficiente della $a$.

[2] Si può prender come un postulato, che tanto sia il prodotto di una quantità per un'altra, quanto la somma de' prodotti dell' una di esse per ciascuna parte dell'altra.

negative, ed ecco ciò ch' esse indicano nel calcolo. E siccome si passa ad ottenerle pel risultamento di una sottrazione, la quale segue lo stato intermedio tra positivo e negativo, ed in cui la quantità da sottrarre supponendosi uguale a quella d' onde si voleva sottrarre, il residuo è zero; perciò suol dirsi ordinariamente, che *le quantità negative sono minori del zero*, mentre le positive ne sono maggiori; con la quale maniera di esprimersi altro non si vuol dinotare, se non che quelle derivino da sottrazione dopo il caso in cui il residuo era divenuto zero, per essere la quantità che sottraevasi giunta all' ultimo stato da distruggere affatto la quantità da cui si sottraeva, cioè esserle divenuta uguale [4]. Nè per ora conviene formarsi di queste quantità altra idea, che quella che ne abbiamo data.

26. In oltre si è già detto, che il prodotto di $a$ per $b$ s' indichi per $a\,b$ (17.); e che il prodotto di più quantità letteralmente espresse si dinoti con l' accozzamento di esse, con quell' ordine che piace. Poichè indicando quell' espressione una moltiplicazione da eseguirsi, cambiandosi l' ordine de' fattori per eseguirla si è veduto non alterarsi il prodotto (12). Or supponendo che quelle quantità sieno tutte uguali, ed espresse dalla stessa lettera $a$; in tal caso in luogo di scrivere quella lettera tante volte di seguito, quante n' era moltiplicata, cioè quanti sono i fattori indicati da essa, come per altro s' incontra fatto ne' libri di analisti più antichi, si scrive una sola volta, e si dinota il numero de' fattori ad essa identici, che debbono contenersi in quel prodotto, con la cifra aritmetica che li rappresenta, la quale si pone a destra della lettera, un poco più alto di essa, e chiamasi *esponente*. Così se $a$ debbasi moltiplicare per $a$, il pro-

---

[4] Anche il Newton nella sua *Arith. Univers.* si espresse dicendo: *Quantitates vel affirmativae sunt seu maiores nihilo, vel negativae seu nihilo minores*.

dotto $aa$ si dinoterà per $a^2$, che pronunziasi *a-due*; e volendo moltiplicare $a$ per $a$, e per $a$, il prodotto $aaa$ verrà piuttosto indicato per $a^3$, che pronunziasi *a-tre*. Ed in generale, se i fattori identici ed espressi ognuno da $a$ sieno al numero indicato da $n$, il loro prodotto verrà dinotato da $a^n$.

27. Ogni espressione di simil forma dicesi *esponenziale*; il numero $n$ che dinota quello de'fattori identici $a$ contenuti nell' esponenziale $a^n$ ne sarà l'*esponente*, la lettera $a$, che disegna ciascuno di que' fattori si dirà *base* della quantità esponenziale. E suole anche la $a^n$ chiamarsi *potenza n* di $a$: ed in tal caso il numero $n$ prende il nome di *grado* o *indice* di tal potenza di $a$; e questa quantità si dirà la *radice n*, o *n-esima* di $a^n$.

28. Ciò posto, se l'esponenziale $a^m$ vogliasi moltiplicare per l'altra $a^n$ della stessa base, è chiaro dal §. precedente, che il loro prodotto dovrà costare de' fattori uguali $a$ dell'una e dell'altra quantità che si moltiplica, cioè di $a^m$ e di $a^n$, i quali essendo pel primo fattore al numero $m$, e pel secondo al numero $n$, risulteranno però pel prodotto al numero $m+n$; che perciò un tal prodotto dovrà essere espresso da $a^{m+n}$ (26). E similmente, volendosi il prodotto di $a^m$ per $a^n$ e per $a^p$, esso sarà $a^{m+n+p}$. D'onde si ottiene la seguente

RFGOLA.

*Ogni quantità elevata ad un esponente può considerarsi come il prodotto della stessa quantità elevata separatamente a tutte quelle parti in cui si vuol concepir diviso il suo esponente.*

Vale a dire che supposta la $m = p + q + r \dots$, sarà

$$a^m = a^p \times a^q \times a^r \dots$$

29. Estendendo il poc'anzi detto principio, si potrà prendere $a^m$ come il prodotto di $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{\frac{m}{n}}$ per $a^{\frac{m}{n}}$ ... tante volte quante bisogna perchè dalla somma continuata di $\frac{m}{n}$ ri-

sulti $m$, cioè $n$ di volte [5]. E perciò si vede, che $a^m$ sia la potenza $n$ di $a^{\frac{m}{n}}$ (27.). Laonde in generale:

*Ogni quantità esponenziale [6] può rappresentare una potenza qualunque di quel grado che vien dinotato dal numero per cui si divide il suo esponente.*

30. Al contrario quest' altra esponenziale della base stessa, che ha per esponente quel quoziente, se considerisi per rispetto alla quantità che si è detto rappresentare la potenza, si dirà *radice* di quel grado medesimo di cui era tal potenza; poichè questa risulta dal numero di fattori di quella dinotato da tal grado. Così essendo $a^m$ la potenza $n$ di $a^{\frac{m}{n}}$; al contrario $a^{\frac{m}{n}}$ è la radice $n$, o *n-esima* della quantità $a^m$. E questa radice suole indicarsi anche prefiggendo alla quantità di cui si prende per radice il segno $\sqrt{}$, che dicesi *radicale* [7], e scrivendo nell' apertura di esso il grado del radi-

—

[5] La quantità $m$ presa $n$ di volte diviene $nm$ (21), e però la $\frac{m}{n}$ presa $n$ di volte rappresenterà la $m$ moltiplicata ad un tempo e divisa per la $n$, o sia moltiplicata per l' *unità*, e però sarà quanto $m$.

[6] L' epiteto di *esponenziale* vi è posto a maggior chiarezza della regola, vedendosi d' altronde assai bene, che non vi sia quantità che non abbia esponente. E laddove alcuno non ve ne sia affisso, vi s' intende l' *unità*, il quale esponente si tralascia di scriverlo.

[7] È facile accorgersi che un tal segno sia un' abbreviazione della lettera $r$, che da' primi analisti si prefiggeva ad una quantità per dinotare la radice, che doveva poi esprimersi qual fosse, cioè la *seconda*, *terza*, *ec.* E similmente indicavasi il *quadrato* di una quantità lotterale con prefiggervi la lettera $q$, iniziale della voce latina *quadratum*, e così pel *cubo* la lettera $c$, o pure *cub.*, per la quarta potenza, che dicevasi *quadrato-quadrato* vi si prefiggeva il $qq$; e così in seguito. Ma tali indicazioni, che per allora potevan solo indurre in qualche equivoco, non sarebbero al presente nè men praticabili, poichè scrivendosi opere algebriche nella propria lingua, l' iniziale di tali voci non è per tutte la medesima.

cale, che si chiama *indice* di questo, cioè pel caso di sopra espresso della radice $n$ di $a^m$, nel seguente modo $\sqrt[n]{a^m}$. E quell' indice suol tralasciarsi nel solo caso che sia 2; sicchè invece di scrivere $\sqrt[2]{a^m}$ basta scrivere $\sqrt{a^m}$.

31. Adunque $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, il che mostra, che:

*Ogni quantità ad esponente fratto rappresenta un radicale, il cui indice sia il denominatore del fratto esponente, e la grandezza sotto il segno radicale sia la base dell' esponenziale elevata al numeratore dell' esponente fratto.*

Al contrario:

*Ogni radicale si potrà sempre trasformare in un' esponenziale frazionaria, se dividasi l' esponente della quantità sotto il segno per l' indice del radicale.*

32. In oltre sia la quantità esponenziale $a^m$, ed $m$ dinoti un qualunque numero intero o fratto, le cui parti sieno rappresentate da $p$, $p$, $p$...; sarà $a^m = a^{p+p+p+\cdots}$ (28.); e 'l distruggimento di ciascun $p$ nell' esponente dinoterà nell' esponenziale $a^m$ lo svanimento di un fattore (26.) dinotato da $a^p$, o sia la divisione di $a^m$ per $a^p$; che perciò, se quelle parti dell' esponente si distruggano tutte, ciò indicherà la divisione di $a^m$ pel prodotto di tutt' i suoi fattori, ciascuno espresso da $a^p$, cioè per la stessa $a^m$; il qual quoziente è l' unità. Ma distruggendosi tutte le parti $p$ dell' esponente $m$ esso divien zero. Adunque $a^0 = 1$; cioè:

*Ogni grandezza che abbia per esponente il zero è uguale all' unità.*

E quest' unità sarà della specie stessa che la base di quell' esponenziale.

33. Finalmente continuandosi lo stesso ragionamento si vedrà, che se pervenuta la quantità $a^m$ ad $a^0$, pel distruggimento di tutte le parti $p$ nel suo esponente $m$, si continui tuttavia a supporre il suo esponente minorato di $p$, si verreb-

bero con tale operazione ad assegnare alla base $a$ gli esponenti negativi $-p$, $-2p$, $-3p$ ... ( 23. ); e quindi si verrebbe a formare un' altra serie di esponenziali negative $a^{-p}$, $a^{-2p}$, $a^{-3p}$ .... $a^{-m}$. Or ciascuna di quelle operazioni esprime un' ulteriore divisione della quantità ottenuta con le divisioni precedenti, per la stessa $a^p$; e quindi siccome tal quantità per siffatte divisioni al numero $n$ era ridotta ad $a^0$, cioè ad 1, si comprenderà perciò facilmente che $a^{-p}$ corrisponda ad $\frac{1}{a^p}$; e così $a^{-2p}$ ad $\frac{1}{a^{2p}}$ ....

$a^{-m}$ ad $\frac{1}{a^m}$. Vale a dire, che:

*Ogni quantità esponenziale ad esponente negativo, pareggia l' unità divisa per la stessa esponenziale coll' esponente positivo.*

# CAPITOLO II.

### Conseguenze che traggonsi dalle considerazioni stabilite nel capitolo precedente.

34. Essendo $a b$ quanto il prodotto di $a$ per $b$ ( 17. ), ed $a^m b^m$ quanto quello di $a^m$ per $b^m$ ( 28. ), ove $m$ dinoti un qualunque numero intero o fratto, positivo o negativo, è chiaro, che se un tal numero $m$ si supponga diviso in parti uguali, $n$ di numero, ciascuna espressa da $p$, debba essere $a^m b^m = a^p . a^p . a^p .$ ec. $\times$ $b^p . b^p . b^p$ ec., essendo $n$ il numero sì de' primi fattori rappresentati da $a^p$, che quello de' secondi dinotati da $b^p$, cioè uguale alla quantità $a^p b^p$ moltiplicata per se stessa continuamente tante volte, quante volte $p$ si contiene in $m$, cioè $n$ di volte. Vale a dire:

*La potenza n di una data quantità, la quale costi di due o più fattori, è quanto il prodotto delle potenze del grado stesso di que' suoi fattori.*

Al contrario: *La radice n di una quantità, che costi di due o più fattori é quanto il prodotto delle radici del grado stesso di ciascuno di que' fattori.*

Così $\quad [a^2 b^3]^3 = [a^2]^3 \times [b^3]^3$

e $\quad \sqrt[5]{a^2 b^3} = \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[5]{b^3}$.

35. In oltre se abbiasi la quantità $m\sqrt[n]{a^{pn} q^r}$, potrà essa porsi sotto l' altra forma $m . a^{\frac{pn}{n}} q^{\frac{r}{n}}$ ( 31. ), ch' è quanto $m . a^p \sqrt[n]{q^r}$, cioè:

*Se mai la quantità esistente sotto al segno radicale abbia un fattore da cui possa estrarsi la radice che l' indice del radicale ne dinota, si potrà il radicale ridurre a forma più semplice, facendo svanire tal fattore da sotto al segno radicale, e moltiplicando il coefficiente del radicale per quella radice di esso fattore.*

36. Di più, se la quantità $a^{\frac{m}{n}}$ debba elevarsi alla potenza $p$ intera o fratta, bisognerà prendere nel primo caso quel moltiplice di $\frac{m}{n}$ che vien dinotato da $p$ ( 29 ), e nel secondo quella parte di $\frac{m}{n}$ che $p$ ne dinota ( 31. ), e sarà quel moltiplice o questa parte di $\frac{m}{n}$ l' esponente rispettivo della potenza o della radice cercata. Poichè in quel primo caso il nuovo esponente $\frac{pm}{n}$ contenendo $p$ di volte l'altro $\frac{m}{n}$, la quantità $a^{\frac{mp}{n}}$ dinoterà la potenza $p$ di $a^{\frac{m}{n}}$ ( 29. ), e nel secondo caso l'esponente $\frac{m}{pn}$ contenendosi $p$ di volte nell' altro $\frac{m}{n}$, anche la quantità $a^{\frac{m}{pn}}$ dovrà contenersi $p$ di volte nell' altra $a^{\frac{m}{n}}$; e perciò quella sarà la radice $p$ di questa (31.) Val quanto dire, che:

*Si eleverà una data quantità a data potenza, moltiplicando l' esponente di quella per l' indice di tal potenza.*

Ed al contrario:

*Si estrarrà da una quantità data la radice di un dato grado, dividendo l' esponente di quella per l' indice di tal radice.*

Così volendo elevare $a^3$ a quadrato, questo sarà $a^{3 \cdot 2} = a^6$, e volendo elevarvi $\sqrt[3]{a}$, tal quadrato sarà quanto $a^{\frac{1}{3} \cdot 2} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$. D' onde si rileva più specialmente, che:

37. *Volendo elevare un radicale a data potenza, basterà elevarvi la quantità sotto il segno; o pure sopprimervi il segno* $\sqrt{}$, *nel caso che la potenza cercata sia del grado stesso di quell' indice.*

Al contrario, volendo estrarre da $a^3$ la radice seconda,

essa (36.) sarà $a^{3 \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$ (35.). E volendola di $\sqrt[3]{a}$, essa sarà $a^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$. Cioè :

*Si estrarrà la radice da un radicale , moltiplicando l' indice del radicale per quello della radice che da esso si vuole estrarre ; o pure estraendola dalla quantità sotto il segno , se questa sia potenza perfetta del grado della radice da estrarsi.*

Così $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{pn}}} = \sqrt[mn]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{mn}} = a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$.

38. Ritornando nuovamente a ciò che fu stabilito nel §.31. si vedrà , che avendosi un radicale della seguente forma $\sqrt[pm]{a^{pn}}$ , l' esponenziale frazionaria che le corrisponde sarà $a^{\frac{pn}{pm}} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ; la qual cosa dinota , che :

*Se mai l' indice , e l' esponente generale della quantità sotto al segno radicale si moltiplichino per uno stesso numero , cioè che questa si elevi a quella potenza pel grado della quale si moltiplica l' indice del radicale ; la quantità radicale che per tal modo si ottiene pareggerà la proposta .*

39. Ciò premessso , se mai si abbiano i due radicali

$$\sqrt[n]{a^m} \quad \text{e} \quad \sqrt[q]{b^p}$$

si vedrà ch' essi ridotti ad esponenziali frazionarie diverranno rispettivamente

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \text{e} \quad a^{\frac{p}{q}},$$

o pure

$$a^{\frac{mq}{nq}} \quad \text{e} \quad b^{\frac{np}{nq}}$$

se riducansi gli esponenti frazionari al medesimo denominatore ; o finalmente a

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \quad \text{e} \quad \sqrt[nq]{b^{mp}}$$

passando di nuovo da esponenziali frazionari a' radicali.

D' onde si rileva , che :

*Due' radicali d' indice diverso possonsi ridurre a due altri respettivamente uguali a' proposti , e dell' indice stesso, pren-*

*dendo per indice comune de' radicali ridotti il prodotto degl'indici de' radicali proposti, ed elevando la quantità ch' è sotto al segno di ciascun di questi alla potenza dinotata dall' esponente dell' altro.*

40. Che se l' indice dell' un radicale riuscisse esattamente divisibile per l' esponente dell' altro, sarà facile il comprendere, che la suddetta riduzione de' radicali si otterrà:

*Moltiplicando l' indice minore per quel quoziente che si ha dividendo per esso l' indice maggiore; ed elevando alla potenza dinotata da tal quoziente stesso la quantità sotto il segno di quel radicale.*

Così $\sqrt[4]{a^3}$, e $\sqrt{b}$ ridotti all' indice stesso diverranno $\sqrt[4]{a^3}$, e $\sqrt[4]{b^2}$. E ciò che si è stabilito nella presente regola è immediata conseguenza del §. 31, e dell' ordinaria teorica per la riduzione de' fratti allo stesso denominatore.

## CAPITOLO III.

### Del segno corrispondente alle quantita' algebriche dopo le operazioni aritmetiche che si fanno con esse, cioè *somma*, *sottrazione*, *moltiplicazione*, *divisione*, *elevazione a potenza*, *estrazione di radice*.

---

41. Le quantità algebriche potendo presentarsi nel calcolo col segno $+$, o col $-$, come si è di sopra veduto (24.), bisogna perciò esaminare qual effetto produca ne' risultamenti delle calcolazioni suddette questa diversità de' segni.

42. Primieramente, per la *somma* è chiaro che nessuna alterazione possa indurre nel risultamento di essa la diversità del segno de' termini analitici da sommarsi, mentre la natura stessa dell' operazione indica chiaramente che le quantità date debbano comprendersi nella somma col segno stesso che avevano.

43. È chiaro ancora, che nella *sottrazione*, qualunque sia il segno della quantità su cui si opera la sottrazione, se quello dell' altra che se ne sottrae sia positivo, cioè $+$, debbasi cambiare in $-$, come sta detto nel §. 22; cioè che da $A$ sottraendo $+B$, la differenza debba essere $A - B$, qualunque fosse il segno della $A$. Di tal che, se questa già indicava il risultamento di una sottrazione giusta il terzo caso del §.23, e però fosse una quantità negativa, la nuova sottrazione che da essa operasi non farà che accrescerla: la qual cosa è evidente; poichè tal nuova sottrazione si può considerare come eseguita ad un tratto da quella quantità sulla quale operando la prima sottrazione erasi ottenuto il residuo $-A$.

Così se da 7 si fosse sottratto 9, sicchè il residuo fosse stato $-2$, e poi di nuovo dal $-2$ si sottraesse $+3$, ciò equivale a sottrarre da principio $9+3$, cioè 12, da 7; e però il residuo risultante dovrà essere $-5$, cioè quanto il

$-2$ prima ottenuto aggiunto al $-3$ risultante dalla seconda sottrazione.

Resta ora a vedere cosa avvenga allorchè da $A$ si sottrae $-B$. Or in tal caso è chiaro, che aggiugnendo a queste due quantità una stessa quantità $+B$, e poi eseguendo la sottrazione, non debba soffrir cambiamento la differenza cercata, che perciò la differenza tra $A$ e $-B$ sia quanto quella tra $A+B$ e $-B+B$, cioè tra $A+B$ e *zero*, e quindi uguale ad $A+B$. Adunque per eseguir la sottrazione di $-B$ da $A$, conviene aggiungere ad $A$ il $-B$ con segno cambiato. Ma la stessa aggiunzione col cambiamento di segno si è già veduto aver luogo nell' altro caso ove da $A$ voleva sottrarsi $+B$. Adunque generalmente :

*Volendo sottrarre una quantità algebrica da un' altra, bisogna cambiare a quella da sottrarsi il segno nell' opposto, cioè il + in —, o il — in +, ed aggiugnerla all' altra d' onde vuol sottrarsi.*

44. Passando adesso alla moltiplicazione, potremo prendere come *postulato*, che $+A \times +B = +AB$ ; resta adunque a vedere qual segno tocchi al prodotto di $+A$ per $-B$, e di $-A$ per $-B$. Or nel primo di questi casi è chiaro che il segno del prodotto non possa essere $+$; poichè altrimenti un tal prodotto sarebbe identico all' altro di $+A$ per $+B$; e quindi essendo pur identici i fattori $+A$ e $+A$, lo dovrebbero anch' essere gli altri due $+B$ e $-B$; da che si trarrebbe, con aggiugnervi di comune $+B$, $2B=o$. Che perciò il prodotto di $+A$ per $-B$ dovrà essere $-AB$. Vale a dire, che :

*Quando l' un de' fattori è negativo, il prodotto sarà anche negativo.*

Finalmente, con un ragionamento analogo al precedente si rileverà, che il prodotto di $-A$ per $-B$ debba essere $+AB$ ; mentre supponendolo $-AB$, verrebbe a confondersi con quello di $+A$ per $-B$ ; che perciò sarebbe

come poc' anzi $+B = -B$, e $2B = o$. E però:

*Quando i due fattori sono negativi, o sia entrambi affetti dal segno* —, *il prodotto risulterà positivo.*

45. Adunque dalle precedenti considerazioni rimane stabilita l' ovvia regola pe' segni nella moltiplicazione, cioè che:

*Gli stessi segni de' fattori danno + per segno del prodotto, ed i diversi danno* — .

46. Or siccome ogni potenza non è che il prodotto successivo di fattori uguali (27.), segue perciò dalla regola precedentemente stabilita che:

*Sarà sempre + il segno di una potenza di grado pari di una quantità, sia questa positiva o pur negativa: e se il grado della potenza sia impari, avrà essa lo stesso segno che aveva la radice.*

47. Dalle cose poc' anzi dette si rileva pure, che volendosi scindere un prodotto affetto dal segno + in due fattori, sia dubbio se questi debbano avere ciascheduno il segno +, o pure il —; e che sarà anche dubbio se la radice di grado pari di una quantità positiva debba essere affetta dal segno +, o dal —; che perciò in simili rincontri si prefigge a quo' fattori o a questa radice il doppio segno ±.

Così $\quad +AB = +A \times +B = -A \times -B$

e $\quad \sqrt[2n]{A^{2n}} = \pm A.$

48. Ed è anche manifesto che sia impossibile la radice pari di grado di una quantità negativa, ossia affetta dal —, mentre si è veduto che quella quantità non può giammai aver luogo come potenza pari di un' altra: che perciò dagli analisti, a questa specie di radici che occorre considerare nel calcolo algebrico, come a suo luogo vedremo, si è dato il nome d' *impossibili*, o più comunemente di *radici immaginarie*.

Tal' è, per esempio, $\sqrt[2n]{-A^m}$.

49. Le considerazioni stesse stabilite pe' segni nella moltiplicazione traggono con loro, per immediata conseguen-

za la regola pe' segni nella divisione. Imperocchè essendo $+AB = +A \times +B$, o pure a $-A \times -B$, è egli chiaro, che se $AB$ si divida per $+A$ debba corrispondentemente risultarne per quoziente l' altro fattore $+B$, e dividendo $+AB$ per $-A$ dovrà esser $-B$ il quoziente.

In oltre, poichè $-AB = -A \times +B$, si vede perciò, che dividendo $-AB$ per $+B$ debba risultare per quoziente $-A$; ed al contrario, prendendo per divisore di $-AB$ il fattore $-A$, il quoziente dovrà essere l' altro fattore $+B$.

Vale a dire, che del pari che nella moltiplicazione:

*Allorchè il dividendo e 'l divisore hanno lo stesso segno, il quoziente è positivo; ed è negativo se quelli abbiano segni diversi.*

## CAPITOLO IV.

### Della diversita' che passa tra la natura delle operazioni algebriche e le analoghe della volgare aritmetica.

50. L' Algebra essendo, come fu da principio detto, un' Aritmetica universalizzata, conviene che nel trattar di essa si abbia sempre la mira a mostrare la corrispondenza, o la diversità tra le operazioni che si eseguono col calcolo aritmetico, e le corrispondenti ad esse nel calcolo algebrico; che perciò sebbene quello che saremo per dire nel presente capitolo si possa agevolmente rilevar da chiunque pongasi a riflettere su quanto ne'precedenti si è detto, nulladimeno non abbiamo stimato inopportuno pe' giovani, che ciò sia ad essi manifestamente esposto. Intanto è uopo stabilire prima di ogni altra cosa le seguenti definizioni di alcune voci.

51. Per *Monomio*, o *Termine analitico* s' intende una qualunque espressione algebrica non interrotta da segni, ma con quel solo che le appartiene. Tali sono

$$+3a^2x^3y \ , \quad -4a\sqrt{q} \ , \quad +\frac{m.a^3x^2\sqrt{q}}{3p\sqrt{y}} \ , \ ec.$$

52. Più monomi scritti l' un dopo l' altro, ed enunciati e presi come una sola espressione algebrica, diconsi *Polinomio*. Ed ogni polinomio prende poi più specialmente il nome di *binomio*, *trinomio*, *quadrinomio*, *ec.* dall' esser due, tre, quattro, o più i termini che compongono l' espressione che lo dinota.

Così [*] $3a^2b - 5xy$ è un *binomio*.
$3a^2b - 5xy + 4z$ è un *trinomio*.
$3a^2b - 5xy + 4z - 4z^3$ è un *quadrinomio*.
*ec.* —

[*] Si avverta che il segno + si supprime sì innanzi ad un monomio che di esso sia affetto, sì innanzi al primo termine di un polinomio.

53. Or poichè, com' è chiaro, il valore della quantità rappresentata da un monomio algebrico risulta dalle lettere accozzate che in esso contengonsi, e da' rispettivi esponenti di queste, senza che vi contribuiscano affatto i coefficienti, i quali servon solo ad esprimere i moltiplici, o summoltiplici di una quantità, e senza che vi contribuiscano i segni, che si è veduto essere accidentali alle quantità, risultando essi dalle operazioni che su quelle s' istituiscono, ne segue perciò, che ogni qual volta due monomi algebrici conterranno le stesse lettere, e per le identiche di queste gli stessi esponenti, variando poi, se così avviene, ne' coefficienti, essi esprimeranno in diversa quantità la cosa stessa; e se variano anche ne' segni, dinoteranno anche diverso stato di quella tal cosa. Così i monomi $3a^2x$ e $5a^2x$ non indicano, che la stessa quantità rappresentata da $a^2x$ presa prima 3 volte, e poi 5 volte. Or i termini analitici così condizionati diconsi *simili*. Ed è manifesto che siccome essi rapportansi alla stessa unità, che può esser rappresentata dal complesso della parte letterale di ciascun monomio, si potranno ridurre facilmente ad un solo, con la somma de' coefficienti, se essi avevano il segno stesso, e col sottrarre dal coefficiente maggiore il minore, dando al residuo il segno di quello, se tali monomi erano di contrario segno.

Così per esempio i due monomi

$$3a^2x + 5a^2x \quad \textit{equivalgono a} \quad + 8a^2x\,;$$

e gli altri $\mp 3a^2x \pm 5a^2x$ *equivalgono* a $\pm 2a^2x$.

Considerando la prima volta la linea de' segni superiori, e l' altra quella degl' inferiori.

54. Questa operazione per mezzo della quale due o più termini simili riduconsi ad un solo, dicesi *contrazione*, o *riduzione*.

55. Dalle considerazioni precedentemente stabilite si rileva, che la contrazione non possa aver luogo tra termini analitici dissimili, come per esempio $3a^2x$ e $5a^2x^2$, o pu-

re $3a^2x$ e $5b^2y$ ; ciò non ostante nulla impedisce che l' analista consideri astrattamente queste quantità dissimili, ed ancora di diversa natura , sommate insieme o sottratte l' una dall' altra , e quindi delle poc' anzi dette s' indichi

*la somma per* $3a^2x + 5a^2x^2$

*la differenza per* $3a^2x - 5b^2y$.

56. Ecco già una delle principali differenze tra le operazioni aritmetiche e le algebriche . L' Aritmetica non può istituir somma , o sottrazione , che tra quantità numeriche rapportabili alla stessa unità, o ad unità correlative , e quindi tra quantità o affatto simili , o che vi sieno riducibili , mentre l' Algebra estende tali operazioni anche alle quantità dissimili ; il che fa che solamente questa sia suscettiva di effettive espressioni polinomie.

57. L' altra essenzial differenza tra il calcolo aritmetico e l' algebrico consiste , nel dar quello l' effettivo risultamento delle operazioni che con esso si cercavano , mentre questo non fa altro , come fu già detto nel §. 16 , che indicare in prospetto le operazioni aritmetiche da eseguirsi per ottener quel risultamento , allorchè le quantità letterali si cambiassero in numeriche. Così, per esempio, l'espressione $3a^2x$ non è già il valore enunciativo del prodotto de' tre fattori , cioè di 3 , del quadrato di $a$ e di $x$ , ma una semplice indicazione di tal prodotto , il quale solamente si otterrebbe , allorchè dando ad $a$ , $x$ i valori numerici rispettivi , si eseguisse il quadrato di $a$, e poi si moltiplicasse per 3 , e pel numero che vien rappresentato dalla $x$. Così che ponendo, per un caso, $a = 10$, e però $a^2 = 100$, $x = 5$, la quantità $3a^2x$ prenderebbe il valore enunciativo rappresentato da $3 \times 100 \times 5 = 1500$. Da ciò è manifesta la differenza tra il risultamento di una operazione aritmetica , e quello della simile operazione algebrica ; poichè il primo non è che individuale , o appartenente ad una sola di tali operazioni , mentre l' altro è universale , e comprende tutti gli altri casi analoghi.

58. In oltre è ancor chiaro, che ne' risultamenti aritmetici non si possa scorger la via per la quale vi si è pervenuto; e quando anche questa sappiasi, s' ignora pure da'quali dati si è partito; mentre e quella e questi evidentemente si mostrano ne' risultamenti del calcolo algebrico; vedendosi come in prospetto la natura delle operazioni che ha bisognato effettuare per ottenerlo, e le quantità che vi hanno servito di base. Così, per esempio, ritrovandosi il precedente numero 1500 per risultamento di un calcolo aritmetico, non si può da esso discernere con quante e quali operazioni siasi ottenuto, avendo potuto derivare egualmente per somma, per residuo, per prodotto, per quoziente *ec.*, o da queste operazioni in qualunque modo combinate insieme, e ciò in infiniti modi diversi; il che, quando anche fossero note le specie di operazioni che lo hanno prodotto, ci lascerebbe tuttavia nell' oscurità degli elementi d' onde si è partito; ma al contrario l' espressione algebrica $3a^2x$ fa intuitivamente conoscere, ch' essa risulta dal prodotto del quadrato di $a$ per la $x$ preso 3 volte. E ciò basti per ora sul presente argomento.

## CAPITOLO V.

### Del calcolo algebrico.

59. In questo capitolo nel quale imprendo a trattare del calcolo algebrico, comprenderò per le principali operazioni di esso le quantità in generale, razionali o irrazionali, intere o fratte: poichè come si è già veduto ne' §§. da 29 a 33, unica è la loro natura, e differisconsi solamente nella specie, per la qualità del loro esponente intero o fratto, positivo o negativo. E quelle principali operazioni, sono, come nell' Aritmetica volgare, la *somma*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione* e la *divisione*, delle quali eccone partitamente l' andamento.

#### Della somma, e sottrazione.

60. Per ciò che spetta alla somma, e sottrazione delle quantità algebriche, non v' è bisogno di stabilire alcuna regola, rilevandosi dal §. 42, che la somma di esse si ottiene col disporle l' una dopo l' altra col proprio loro segno, ed eseguendo la contrazione tra i termini simili, se mai ve ne sono; e che la sottrazione non è altro, che una somma della quantità da sottrarsi, col segno cambiato, all' altra d' onde si vuol sottrarre (43.). Sicchè basterà per tali due operazioni il recar qui il seguente

Esempio.

$$\textit{Espr. date}\ \begin{cases} 3a^2x - 7b^3y^2 + 4x\sqrt{y} - 5y\sqrt{x} \\ 2a^2x^2 - 5b^3y^2 + \dfrac{6x}{7y} - 6y\sqrt[4]{x^2} \end{cases}$$

Potendo supporre tali espressioni già disposte l' una in continuazione dell' altra eseguendo in esse la contrazione si avrà per loro

$$\textit{somma} \qquad 3a^2x + 2a^2x^2 - 12b^3y^2 + 4x\sqrt{y} + \frac{6x}{7y} - 11y\sqrt{x}$$

E così pure cambiando i segni a' termini di quella che vuol sottrarsi, o sia alla seconda di esse, e poi eseguendone la somma con l'altra si otterrà il

*residuo* $\left\{ 3a^2x - 2a^2x^2 - 2b^3y^2 + 4x\sqrt{y} - \frac{6x}{7y} + y\sqrt{x} \right.$

61. Ove è da notarsi solamente, che i quarti termini delle espressioni date, cioè $-5y\sqrt{x}$, e $-6y\sqrt[4]{x^2}$, i quali contengono per fattori quantità radicali, sono simili, sebbene non l'apparissero a prima vista, per essere quello della seconda di esse, cioè $-6y\sqrt[4]{x^2}$ suscettivo di riducimento a $-6y\sqrt{x}$ ( 38. ) ; ha però bisognato eseguirvi prima una tal riduzione, ed indi la contrazione.

62. Chi volesse poi convincersi della verità di quel residuo, anche partendo dall' ordinaria nozione, che di esso si ha, cioè che debba il medesimo aggiunto alla quantità che si è sottratta produrre l'altra sulla quale si è operata la sottrazione, troverà ciò vero effettuando tal somma.

63. Allorchè però nelle espressioni proposte per la somma, o per la sottrazione vi sono fratti; i risultamenti di tali operazioni sono ancora suscettivi di riducimento, del che tratteremo dopo di aver esposte le regole per la moltiplicazione, e per la divisione delle quantità algebriche.

### DELLA MOLTIPLICAZIONE.

64. In primo luogo sia da moltiplicare

*il monomio* $m.a^px^q$

*per l' altro* $n.b^ry^t$

ove $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $t$ dinotino qualunque numeri razionali. É chiaro dal §. 17, che verrà dinotato

*il prodotto da* $mn.a^pb^rx^qy^t$.

Ciò posto, passiamo ad esaminare particolarmente le diverse forme che prende tal prodotto secondo i segni e la qualità intera o fratta degli esponenti $p$, $q$, $r$, $t$.

65. Primieramente sia negativo l' esponente $q$, sicchè quel primo fattore si trasmuti nel fratto $\frac{m.a^p}{x^q}$ ( 33.) : è chiaro, che il prodotto di sopra indicato prenderà in questo caso la forma $\frac{mn.a^p b^r y^t}{x^q}$. D' onde si rileva che :

*Un monomio frazionario si moltiplica per un altro monomio intero , moltiplicando il numeratore del fratto per l' intero , e ritenendo nel prodotto lo stesso denominatore del fattore frazionario .*

66. Ed essendo negativo anche l' esponente $t$ della $y$ nell'altro fattore , sicchè questo si riduca ad $\frac{n.b^r}{y^t}$ ; quel prodotto da prima ottenuto diverrà della seguente forma $\frac{mn.a^p b^r}{x^q y^t}$; e ciò mostra che :

*Due monomi frazionari si moltiplicano fra loro , moltiplicando fra loro i numeratori , e fra loro anche i denominatori.*

67. Che se l'esponente $q$ della $x$ fosse stato un fratto, per esempio $\frac{h}{u}$ sicchè quel primo fattore si cambi in $mn.a^p \sqrt[u]{x^h}$ ( 31. ) , il prodotto di sopra espresso prenderà anch'esso la forma $mn.a^p b^r y^t \sqrt[u]{x^h}$ .
E da ciò si rileva , che :

*Un monomio razionale si moltiplica per un altro monomio radicale , moltiplicando il coefficiente di questo* , cioè la quantità , ch' è fuori del segno radicale , *per quel primo monomio* .

68.E supponendo in oltre esser anche frazionario l' esponente $t$ , ed espresso da $\frac{i}{l}$ , sicchè il fattore ove contiensi la $y^t$ sia della forma $n.b^r \sqrt[l]{y^i}$ , in tal caso quel prodotto prenderà la forma

$$m.na^pb^r\sqrt[n]{x^h}\sqrt[l]{y^i}$$

Ov' è da avvertirsi che siccome i due fattori

$$\sqrt[n]{x^h} \quad \text{e} \quad \sqrt[l]{y^i}$$

ridotti allo stesso indice ( 39. ) corrispondono a

$$\sqrt[nl]{x^{hl}} \quad \text{e} \quad \sqrt[nl]{y^{in}}$$

il cui prodotto è $\sqrt[nl]{x^{hl}y^{in}}$ , così quel prodotto già indicato di sopra diverrà $mn.a^pb^r\sqrt[nl]{x^{hl}y^{in}}$. Cioè a dire che : *Due monomi radicali si moltiplicano fra loro , riducendo prima que' radicali allo stesso indice , e poi moltiplicando fra loro i coefficienti di questi , ed anche fra loro le quantità sotto a' segni de' medesimi radicali.*

69. Che se i fattori proposti fossero nel tempo stesso radicali e frazionari, si otterrà il prodotto, com'è di per se chiaro, combinando insieme le regole date ne' numeri precedenti.

70. Operando nell' anzidetto modo si troverà, che il prodotto de' due monomi

$$\frac{3a^2\sqrt[3]{x^2}}{2b^3\sqrt{y}} \quad \text{e} \quad \frac{c\sqrt{z}}{4r\sqrt[4]{u^3}} \quad \text{sia} \quad \frac{3a^2c\sqrt[6]{x^4z^3}}{8b^3r\sqrt[4]{u^3y^2}}$$

71. Sicchè per la moltiplicazione de' monomi algebrici non resta altro caso a considerare.

72. Suppongasi ora che sia polinomio l' un de' fattori ; risulterà il prodotto di esso per l' altro fattore monomio , dalla somma de' prodotti parziali di ciascun termine di quel polinomio per questo monomio : e l' operazione a farsi per questo caso rientrerà perciò nel precedente , come lo mostra l' esempio , che or segue :

$$\textit{Fattori} \quad \begin{cases} 3a^2x - 4b^3y + 5\sqrt[3]{x^2} \\ 2a^2y \end{cases}$$

$$\textit{Prodot.} \quad 6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^2y\sqrt[3]{x^2}$$

73. Se di ciò , che intuitivamente per altro rilevasi , si

volesse ancora una dimostrazione, essa potrà ottenersi con un ragionamento analogo a quello della prop. 7. lib. VII. di Euclide, nel seguente modo.

Sia A + B + C = M : dico che debba esser pure AP + BP + CP = MP.

Imperocchè, per la natura della moltiplicazione [9], P misura AP per le unità che sono in A; e similmente P misura BP per le unità che sono in B, e la stessa P misura CP per le unità che sono in C. Adunque P misurerà AP + BP + CP per le unità che sono in A + B + C, o sia in M. Ma P misura MP anche per le unità che sono in M. Adunque P misura egualmente AP + BP + CP, che MP, e però queste due quantità sono uguali.

74. Finalmente essendo polinomi ambo i fattori, risulterà il prodotto, com' è chiaro, dalla somma de' prodotti di un di essi per ciascun termine dell'altro; del che eccone un esempio:

$$\textit{Fatt.}\begin{cases} 3a^2x - 4b^3y + 5\sqrt[3]{x^2} \\ 2a^2y - 4q\sqrt{y} \end{cases}$$

$$\textit{Prod. parz.}\begin{cases} 6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^2y\sqrt[3]{x^2} \\ \qquad - 12a^2qx\sqrt{y} + 16b^3qy\sqrt{y} - 20q\sqrt[6]{x^4y^3} \end{cases}$$

$$\textit{Prod. tot.}\begin{cases} 6a^4xy - 8a^2b^3y^2 + 10a^2y\sqrt[3]{x^2} - 12a^2qx\sqrt{y} + 16b^3qy\sqrt{y} \\ \qquad - 20q\sqrt[6]{x^4y^3} \end{cases}$$

75. Ed è da osservarsi, che sebbene sia arbitraria la maniera di disporre i prodotti parziali, pure conferisce in alcuni casi alla *contrazione* il disporre que' tali prodotti in modo, che i termini simili si corrispondano in una stessa linea verticale:

---

[9] È noto dagli Elementi di Aritmetica, che l'unità stia all'un de' fattori, come l'altro fattore al prodotto, val quanto dire, che l'un de' fattori si contenga, e ch'è lo stesso misuri il prodotto, per quante volte l'unità si contiene, ossia misura l'altro fattore.

| | |
|---|---|
| *Fattori* | $a+b$ <br> $a-b$ |
| *Prod.par.* | $a^2+ab$ <br> $\quad -ab-b^2$ |
| *Prod.tot.* | $a^2 \quad * \quad -b^2$ |

76. Questo risultamento mostra per intuizione che : *Moltiplicando la somma di due numeri , per la loro differenza , il prodotto che si ottiene è quanto la differenza de' quadrati di que' numeri stessi.*

77. Pe' due precedenti casi della moltiplicazione ( 72. e 74. ) conviene avvertire , che ove avvenga, che l' un de' fattori , o pur tutti due sieno quantità frazionarie , o pur radicali , si dovrà alle regole in essi date per ottenere il prodotto , accoppiar quelle stabilite nel primo caso relativamente a tali specie di quantità ; le quali regole sebbene ivi si veggano stabilite pe' monomj , pure ognun rileva facilmente che niente impedendo perchè ciascuna delle lettere che indicava un monomio , o un suo fattore , rappresentasse un polinomio qualunque, si possano perciò esse ad ogni specie di polinomj algebrici estendere . Ed i seguenti esempj mostreranno in prospetto l' uso delle medesime :

$$(3a^3x-4b^3y)\times\frac{2xy+4q^2}{3m^2+4n^2}=\frac{(3a^3x-4b^3y)\times(2xy+4q^2)}{3m^2+4n^2}$$

$$=\frac{6a^3x^2y-8b^3xy^2+12a^3q^2x-16b^3q^2y}{3m^2+4n^2}$$

$$\frac{3a^3x-4b^3y}{a^2-b^2}\times\frac{2xy+4q^2}{3m^2+4n^2}=\frac{(3a^3x-4b^3y)\times(2xy+4q^2)}{(a^2-b^2)\times(3m^2+4n^2)}$$

$$=\frac{6a^3x^2y-8b^3xy^2+12a^3q^2x-16b^3q^2y}{3a^2m^2-3b^2m^2+4a^2n^2-4b^2n^2}$$

$$(3a^3x-4b^3y)\times3y\sqrt{(2xy+4q^2)}=(9a^3xy-12b^3y^2)\sqrt{(2xy+4q^2)}$$

$$=9a^3xy\sqrt{(2xy+4q^2)}-12b^3y^2\sqrt{(2xy+4q^2)}$$

$$(3a^3x-4b^3\sqrt{y})\times3y\sqrt{(2xy+4q^2)}=9a^3xy\sqrt{(2xy+4q^2)}-12b^3y\sqrt{(2xy+4q^2y)}$$

### DELLA DIVISIONE.

78. Vogliasi ora dividere il monomio

$m.a^p x^q$ per l' altro $n.b^r y^t$

ove similmente sieno $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $t$ numeri qualunque positivi o negativi, interi o fratti; il quoziente verrà espresso dal fratto $\frac{m.a^p x^q}{n.b^r y^t}$ (17.) ossia $\frac{m}{n}.\frac{a^p x^q}{b^r y^t}$.

79. Or suppongasi, che l' esponente $q$ sia negativo, sicchè il dividendo $m.a^p x^{-q}$ si cambii(33.) nel fratto $\frac{m.a^p}{x^q}$; il quoziente poc' anzi ottenuto si trasmuterà anch' esso nell' altro $\frac{m}{n}.\frac{a^p}{b^r x^q y^t}$; dal quale si rileva che:

*Per dividere un fratto per un intero, bisogna moltiplicare per l' intero il denominatore del fratto.*

80. Che se fosse pur negativo l' esponente $t$, sicchè il divisore proposto sia anche frazionario, ed espresso da $\frac{n.b^r}{y^t}$, quel quoziente sarebbesi cambiato in $\frac{m}{n}.\frac{a^p}{\frac{b^r x^q}{y^t}}$; e moltiplicando per $y^t$ sì il numeratore che il denominatore di tal fratto, il che non altera il suo valore, poichè ciò equivale a moltiplicare il fratto per 1, esso diverrà $\frac{m}{n}.\frac{a^p y^t}{b^r x^q}$. D' onde si rileva, che:

*Il quoziente di un fratto per un altro corrisponde al prodotto del primo per lo secondo rovesciato.*

81. Che se l' esponente $q$ della $x$ nel monomio dividendo $m.a^p x^q$ fosse un fratto $\frac{h}{u}$, sicchè esso si trasmuti in $m.a^p \sqrt[u]{x^h}$, esprimerà $\frac{m.a^p \sqrt[u]{x^h}}{n.b^r y^t} = \frac{m\ a^p}{n.b^r y^t}\sqrt[u]{x^h}$ il quoziente di esso per $n.b^r y^t$; d' onde si rileva che:

*Il quoziente di un radicale monomio, per un monomio razionale si ha sol col dividere per questo il coefficiente di quello, rimanendovi inalterato il radicale.*

82. Ed essendo anche frazionario l' esponente $t$ del divisore, ed espresso da $\frac{i}{l}$, sicchè il divisore $n.b^r y^t$ corrisponda ad $n.b^r \sqrt[l]{y^i}$; il quoziente sarà

$$\frac{m.a^p \sqrt[n]{x^h}}{n.b^r \sqrt[l]{y^i}} = \frac{m.a^p}{n.b^r} \times \frac{\sqrt[n]{x^h}}{\sqrt[l]{y^i}} = \frac{m.a^p}{n.b^r} \times \sqrt[nl]{\frac{x^{hl}}{y^{ni}}}$$

riducendo i due radicali all' indice stesso (39), per l' effettiva divisione, come fu fatto per la moltiplicazione al §. 68. Da che risulta la seguente regola:

*Un radicale monomio si divide per un altro di simil natura, dividendo l' un radicale per l' altro, cioè le quantità sotto a' loro segni, dopo averli ridotti allo stesso indice, e dando per coefficiente al quoziente quello, che si ottiene dal dividere i coefficienti de' radicali rispettivi.*

83. Non è fuor di proposito avvertire, che tutte le precedenti regole per la divisione de' monomi algebrici, avrebbonsi potuto anche ricavare da quelle già date per la moltiplicazione, partendo dal principio, che il quoziente debba essere tal quantità, che moltiplicata pel divisore riproduca il dividendo. Dal qual principio è anche facile rilevare, che:

*Volendo dividere un polinomio per un monomio, bisogna dividere ciascun termine di quel polinomio per tal monomio*(72).

84. Dal principio stesso ricaveremo la regola per la divisione di un polinomio per un altro.

Rappresenti dunque $A + B + C + \ldots$ un polinomio da moltiplicarsi per l'altro $M + N + \ldots$ Egli è chiaro dal § 74, che il prodotto richiesto debba risultare da' seguenti prodotti parziali, cioè,

$$A \times [M + N + \ldots]$$
$$B \times [M + N + \ldots]$$
$$C \times [M + N + \ldots]$$
ec,

da' quali prodotti parziali si rileva per intuizione, che l' A termine dell' un fattore entri per moltiplicatore in tutt' i termini dell' altro, e similmente il B, e 'l C . . . Adunque volendo dividere quel prodotto totale

$$AM + AN \ldots + BM + BN \ldots + CM + CN \ldots$$

per $A + B + C + \ldots$, se prendasi in esso un termine qualunque che sia divisibile per un altro del divisore, come per A, stabilendo l' uno e l' altro per primi termini rispettivamente delle due espressioni, come per esempio AM ed A, e si esegua la divisione dell'un monomio per l'altro, il quoziente M dovrà essere un de'termini dell'altro fattore, per esempio M, e questo moltiplicato per l'intero divisore $A + B + C + \ldots$ dovrà avere nel dividendo proposto tanti termini di rincontro, co' quali si dovrà perciò distruggere eseguendo la sottrazione di tal prodotto dal dividendo, a meno che la contrazione non avesse fatto scomparire qualche termine in quel dividendo, nel qual caso la presente sottrazione vel restituirebbe. In seguito dell' operazione finora descritta dovranno, nel residuo che si ottiene, sparire tutt' i termini che conteneano la M, non restandovi che solamente quelli che risultavano dal prodotto di $A + B + C + \ldots$ per $N + \ldots$; che perciò, preso in tal residuo un termine divisibile per quello stesso A del divisore, ed eseguita la divisione di quel termine per questo, si avrà un altro quoziente N, che similmente moltiplicato per l' intero divisore $A + B + C + \ldots$, dovrà trovare nel residuo di poc' anzi, che ha fatto da dividendo, altrettanti termini di rincontro, co' quali si distruggerà per la sottrazione, dando luogo ad un nuovo residuo, in cui non dovrà più trovarsi nè men per fattore la N. E così in seguito.

*Un monomio radicale si divide per un altro razionale dividendo il coefficiente di quello pel coefficiente di questo, e moltiplicando pel quoziente il fattore radicale del primo.*

82. Ed essendo anche frazionario l' esponente $t$ del divisore, ed espresso da $\frac{i}{l}$, sicchè il divisore $n.b^r y^t$ corrisponda ad $n.b^r\sqrt[l]{y^i}$; il quoziente

$$\frac{m.a^p\sqrt[n]{x^h}}{n.b^r\sqrt[l]{y^i}}=\frac{m.a^p}{n.b^r}\times\frac{\sqrt[n]{x^h}}{\sqrt[l]{y^i}}$$

indicherà che:

*Si divide un monomio radicale per un altro di simile natura dividendo l' un radicale per l' altro, e dando per coefficiente al quoziente quello che si ottiene dal dividere i coefficienti de' radicali rispettivi.*

83. E non è fuor di proposito avvertire, che tutte le precedenti regole per la divisione de' monomj algebrici, avrebbonsi potuto anche ricavare da quelle già date per la moltiplicazione, partendo dal principio, che il quoziente debba essere tal quantità, che moltiplicata pel divisore riproduca il dividendo. Dal qual principio è anche facile rilevare che:

*Volendosi dividere un polinomio per un monomio, bisogni dividere ciascun termine di quel polinomio per tal monomio* ( 72. ).

84. Dal principio stesso ricaveremo la regola per la divisione di un polinomio per un altro.

Rappresenti dunque $A+B+C+\ldots$ un polinomio da moltiplicarsi per l' altro $M+N+\ldots$ Egli è chiaro dal §.74, che il prodotto cercato debba risultare da' seguenti prodotti parziali cioè

$$A\times[M+N+\ldots]$$
$$B\times[M+N+\ldots]$$
$$C\times[M+N+\ldots]$$

ec.

da' quali prodotti parziali si rileva per intuizione, che l' A termine dell' un fattore entri per moltiplicatore in tutt' i termini dell' altro, e similmente il B, e 'l C, ... Adunque volendo dividere quel prodotto totale

$$AM + AN \ldots + BM + BN \ldots + CM + CN \ldots$$

per $A + B + C + \ldots$, se prendasi in esso un termine qualunque che sia divisibile per un altro del divisore, come per A, stabilendo l' uno e l'altro per primi rispettivamente delle due espressioni, come per esempio AM ed A, e si esegua la divisione dell' un monomio per l' altro, il quoziente M dovrà essere un de' termini dell' altro fattore, per esmpio M; e questo moltiplicato per l' intero divisore $A + B + C + \ldots$ dovrà avere nel dividendo proposto tanti termini di rincontro, co' quali si dovrà perciò distruggere eseguendo la sottrazione di tal prodotto dal dividendo, a meno che la contrazione non avesse fatto scomparire qualche termine in quel dividendo, nel qual caso la presente sottrazione vel restituirebbe. In seguito della finora descritta operazione dovranno, nel residuo che si ottiene, sparire tutt' i termini che conteneano la M, non restandovi che solamente quelli che risultavano dal prodotto di $A + B + C + \ldots$ per $N + \ldots$ che perciò, preso in tal residuo un termine divisibile per quello stesso A del divisore, ed eseguita la divisione di quel termine per questo, si avrà un altro quoziente N, che similmente moltiplicato per l' intero divisore $A + B + C + \ldots$ dovrà trovare nel residuo di poc' anzi, che ha fatto da dividendo, altrettanti termini di rincontro, co' quali si distruggerà per la sottrazione, dando luogo ad un nuovo residuo, in cui non dovrà più trovarsi nè men per fattore la N: e così in seguito.

85. È facile comprendere dal già detto, che la divisione non possa tentarsi, che solo quando sienvi lettere comuni al dividendo ed al divisore; e che l'operazione incominciata si arresterà quando ciò si trovi non aver più luogo. Sic-

chè dopo le cose esposte nel precedente paragrafo, potrà stabilirsi per tale operazione la seguente regola.

*Per dividere un polinomio per un altro, si ordini il dividendo e 'l divisore per rapporto ad una stessa lettera* [10], *e poi si divida il primo termine del dividendo per lo primo del divisore; il quoziente che si ha si moltiplichi per l' intero divisore, e tal prodotto si sottragga dal dividendo. Indi ordinato il residuo per la stessa lettera, si continui la divisione come poc' anzi, finchè o si abbia per ultimo residuo il zero* [11], *o pure si pervenga a tal residuo, che non possa più continuarsi la divisione* [12].

86. Per ora supporremo ne' seguenti due esempj aver luogo il primo de' suddetti casi:

ESEMPIO I.

| *Divisore* | *Dividendo* |
|---|---|
| $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$ | $5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| *Quoz.* $a^3-4a^2b+2b^3$ | $5a^7-2a^6b+4a^5b^2$ |
| 1° res. | $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| | $-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$ |
| 2° res. | $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| | $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| 3° res. | 0 0 0 |

Le espressioni date si sono ordinate per rapporto alla lettera $a$, e la divisione sì nel dividendo proposto, che in ciascuno de' residui, si è sempre fatta pel termine $5a^4$ posto in primo luogo nel divisore. E la precedente regola, e ciò che

[10] Cioè si dispongano i termini dell' uno e dell' altro secondo gli esponenti di questa lettera.

[11] Il che dinoterà che quel divisore era effettivamente un fattore del dividendo, l' altro de' quali vien dinotato dal quoziente.

[12] Del qual caso ragioneremo di qui a poco nel seguente capitolo.

ora abbiamo detto è sufficiente a far intendere senz' altra spiega l' andamento dell' operazione fatta.

ESEMPIO II.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4 - b^4 \quad\quad \big|\ a-b \\
 & a^4 - a^3b \quad\quad \text{Quoz.}\ a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\
\hline
1^\circ \text{ res.} & +a^3b - b^4 \\
 & +a^3b - a^2b^2 \\
\hline
2^\circ \text{ res.} & +a^2b^2 - b^4 \\
 & +a^2b^2 - ab^3 \\
\hline
3^\circ \text{ res.} & +ab^3 - b^4 \\
 & +ab^3 - b^4 \\
\hline
4^\circ \text{ res.} & 0 \quad 0
\end{array}
$$

87. Termineremo quest' argomento della divisione con dimostrare il seguente

TEOREMA.

*Se la quantità algebrica P risultante da' due fattori M,N, sia esattamente divisibile per l' altra D; dovrà ancora esserlo l' un de' fattori M, o N di essa.*

Imperocchè essendo $P = M \times N$, e P divisa per D dando per quoziente esatto la quantità Q, dovrà essere $Q = \frac{M \times N}{D}$. Ma M ed N essendo entrambe fattori di P ne sono però divisori esatti, e però $\frac{P}{M}$, o $\frac{P}{N}$ è un' espressione intera. Adunque ancor tale dovrà risultare $\frac{N}{D}$, o $\frac{M}{D}$

85. È facile comprendere dal già detto, che la divisione non possa tentarsi, che solo quando sienvi lettere comuni al dividendo ed al divisore; e che l' operazione incominciata si arresterà quando ciò si trovi non aver più luogo. Sicchè dopo le cose esposte nel precedente paragrafo, potrà stabilirsi per tale operazione la seguente

## REGOLA

86. *Per dividere un polinomio per un altro, si ordini il dividendo e'l divisore relativamente ad una stessa lettera* [1], *e poi si divida il primo termine del dividendo per lo primo del divisore; il quoziente che si ha si moltiplichi per l' intero divisore, e tal prodotto si sottragga dal dividendo. Indi ordinato il residuo per la stessa lettera, si continui la divisione come poc' anzi, finchè o si abbia per ultimo residuo il zero* [2], *o pure si pervenga a tal residuo, che non possa più continuarsi la divisione* [3].

87. Per ora supporremo ne' seguenti due esempi aver luogo il primo de' suddetti casi:

### Esempio I.

| *Divisore* | *Dividendo* |
|---|---|
| $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$ | $5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| *Quoz.* $a^3-4a^2b+2b^3$ | $5a^7-2a^6b+4a^5b^2$ |
| 1° res. | $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| | $-20a^6b+8a^5b^2-16a^4b^3$ |
| 2° res. | $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| | $+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ |
| 3° res. | 0 0 0 |

---

[1] Cioè si dispongano i termini dell' uno e dell' altro secondo gli esponenti di questa lettera.

[2] Il che dinoterà che quel divisore era effettivamente un fattore del dividendo, l' altro de' quali vien dinotato dal quoziente.

[3] Del qual caso ragioneremo di qui a poco nel seguente capitolo.

Le espressioni date si sono ordinate per rapporto alla lettera $a$, e la divisione sì nel dividendo proposto, che in ciascuno de' residui, si è sempre fatta pel termine $5a^4$ posto in primo luogo nel divisore. E la precedente regola, e ciò che ora abbiamo detto è sufficiente a far intendere senz' altra spiega l' andamento dell' operazione eseguita.

### Esempio II.

| | |
|---|---|
| $a - b$ | $a^4 - b^4$ |
| *Quoz.* $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ | $a^4 - a^3b$ |
| 1° res. | $+ a^3b - b^4$ |
| | $+ a^3b - a^2b^2$ |
| 2° res. | $+ a^2b^2 - b^4$ |
| | $+ a^2b^2 - ab^3$ |
| 3° res. | $+ ab^3 - b^4$ |
| | $+ ab^3 - b^4$ |
| 4° res. | $0 \quad 0$ |

## CAPITOLO VI.

### Conseguenze che dal precedente capitolo traggonsi per la riduzione de' fratti.

88. Essendo $\frac{P \pm Q}{V} = \frac{P}{V} \pm \frac{Q}{V}$ (74) si vede, che :

*Incontrandosi nel calcolo fratti dello stesso denominatore, la loro somma, o la differenza dell' un di essi dall'altro, supposto che sien due, si ottiene col sommare o sottrarre i loro numeratori, conservandovi quel denominatore comune.*

Ed è questa per appunto la regola per la *somma*, e *sottrazione* de' fratti, quando abbiano un comune denominatore.

89. Che se essi non abbiano un comune denominatore sarà facile ridurveli nel seguente modo. Sieno $\frac{M}{N}$ e $\frac{P}{Q}$ i fratti proposti; si potrà inserire nel numeratore e denominatore del primo il fattore Q dinotato dal denominatore dell' altro fratto, senza che si alteri il valore di quello; e viceversa si potrà inserire nel numeratore e denominatore del secondo fratto il fattore N dinotato dal denominatore del primo, senza alterare il valore di questo secondo fratto, per la quale operazione i due fratti che si ottengono, avranno per comune denominatore il prodotto de' denominatori de' fratti dati; ed essi saranno i seguenti $\frac{MQ}{NQ}$, $\frac{NP}{NQ}$. Adunque estendendo a mano mano questa riduzione a più fratti, e deducendone la regola generale per eseguirla, sarà questa la seguente :

90. *Per ridurre due o più fratti di diverso denominatore ad altrettanti dello stesso denominatore, ed uguali rispettivamente a' proposti, bisogna prendere per comune denominatore de' fratti ridotti il prodotto de' denominatori de' fratti dati; e 'l numeratore di ognun di questi sarà espresso dal prodotto del nume-*

*ratore del fratto dato corrispondente ad esso*, *pe' denominatori di tutti gli altri fratti dati.*

Così se fossero dati i fratti

$$\frac{M}{N} \quad \frac{P}{Q} \quad \frac{R}{S}$$

i loro corrispondenti fratti ridotti saranno

$$\frac{MQS}{NQS} \quad \frac{NPS}{NQS} \quad \frac{NQR}{NQS}$$

91. Che se i fratti proposti fossero stati della seguente forma $\frac{M}{NQ}$, $\frac{P}{RQ}$, i denominatori de' quali hanno il fattore comune Q, è chiaro che per ridurli allo stesso denominatore basterà semplicemente moltiplicare i termini del primo fattore per R, e quelli del secondo per N, cioè ciascuno di essi per que' fattori non comuni a' loro denominatori. Di tal che, se i fattori proposti fossero stati $\frac{M}{NQ}$, $\frac{P}{Q}$, ne' quali a dirittura il denominatore Q del secondo sia un fattore di quello NQ del primo, sarebbe stato sufficiente ad eseguir la riduzione di tali fratti allo stesso denominatore il moltiplicare i termini P, Q del secondo fratto pel quoziente N che si ha dividendo il denominatore NQ per l' altro Q.

92. E s' intende pur facilmente, che volendo ridurre un intero allo stesso denominatore di un fratto, bisognerà moltiplicare l' intero per quel denominatore; sicchè volendo sommare insieme quell' intero e 'l fratto, o pur sottrarre l' un di essi dall' altro, si perverrà a questo risultamento dopo di aver esegnita la poc' anzi detta riduzione.

Così l' intero M e 'l fratto $\frac{P}{Q}$ presi insieme corrispondono all' espressione $\frac{MQ+P}{Q}$. Ed al contrario, se si fosse ottenuto in seguito di una calcolazione una espressione della

forma poc' anzi detta, eseguendo la divisione del numeratore per lo denomiuatore finchè è possibile, si tornerebbe ad avere l' intero M, e il fratto $\frac{P}{Q}$. E ciò può servir di compimento a quello che fu detto intorno alla divisione nel §.85, facendo conoscere, che tutte le volte che la divisione dopo essersi continuata fino ad un certo segno viene ad arrestarsi, ciò dinota, che il dividendo era un' espressione la quale risultava dal riducimento di un intero e fratto tutto a fratto; che perciò si compirà l' espressione equivalente a tal divisione, cioè il quoziente di essa, aggiungendo all' intero di già ottenuto la frazione che ha per numeratore il residuo di quella divisione, e per denominatore il divisore proposto.

93. Or poichè non si altera il valore di un fratto distruggendo ne' suoi termini, cioè nel numeratore e denominatore, i fattori comuni, se ve ne sieno, ognun comprende, che per tale operazione esso possa rendersi più semplice; e che prenderà la forma semplicissima di cui è suscettivo, allorchè siensi a dirittura distrutti tutt' i fattori comuni a' suoi termini, cioè quando il suo numeratore e denominatore siensi divisi pel prodotto di tutti que' fattori, il qual prodotto dicesi *massimo comun divisore*. Laonde la ricerca di questo massimo comun divisore è di estrema importanza nel calcolo algebrico; poichè per mezzo di essa talune espressioni frazionarie possonsi presentare in forma semplicissima. E quì avvertiremo, che non conviene mai nel calcolo algebrico tralasciare di eseguire tutte quelle riduzioni delle quali una formola è suscettiva, e che possono rendere il progresso della calcolazione più semplice.

94. La stessa definizione del massimo comun divisore basta a mostrare il modo da rinvenirlo nelle quantità monomie; poichè è chiaro, che si otterrà prendendo tutt' i fattori comuni ad esse, che sono facili a ravvisarsi, e moltiplicandoli fra loro. Così il massimo comun divisore tra le quantità

$$3a^2x^2y \quad \text{e} \quad 12a^4x^2q$$

è evidentemente $3a^2x^2$, ch'è il prodotto de' fattori 3, $a^2$, $x^2$ comuni alle quantità proposte.

95. Nel caso poi che le quantità tra le quali si vuole il massimo comun divisore fossero polinomie, i principj su cui è fondata l'anzidetta ricerca sono i seguenti :

96. I. *Se una quantità divide esattamente due altre quantità, dee anche dividere esattamente il residuo della divisione dell' una di quelle per l' altra.*

Sieno M, N le due quantità, che abbiano per comun divisore l'altra D; ed N dividendo M dia per residuo R : dovrà la D dividere anche la R.

Imperocchè sia Q il quoziente della divisione di M per N, sarà per la natura di questa operazione $M = NQ + R$; e quindi $M - NQ = R$, ed $\frac{M - NQ}{D} = \frac{R}{D}$. Or il primo quoziente si suppone esatto, poichè le M ed N sono divisibili per D. Adunque dovrà essere anche esatto il quoziente di R per D.

E questo principio, come tra poco si vedrà, è fondamentale per la ricerca del massimo comun divisore.

97. II. *Non si altera il comun divisore di due quantità date se l' una di esse si moltiplichi o pur si divida per quantità che non sia fattore dell' altra.*

Il qual principio che serve a condurre innanzi l'operazione per la ricerca del massimo comun divisore, è immediata conseguenza della definizione di esso.

Così il comun divisore tra le quantità MNQ ed MNP è MN, e continua ad esser tale introducendo in una di esse la X per fattore, e nell'altra la Y, sicchè quelle divengano rispettivamente MNQX, MNPY. E continuerà pure ad esser lo stesso MN il massimo comun divisore, se in queste quantità si distrugga nella prima il fattore Q, e nella seconda l'altro P, sicchè divengano MNX, MNY.

98. Ciò premesso, sieno A, B le quantità tra le quali si cerchi il massimo comun divisore; e divisa A per B si abbia per quoziente Q e per residuo R: per cui dividasi B per R, e si abbia di nuovo per quoziente Q′ e per residuo R′; dovrà lo stesso comun divisore esserlo anche di R ed R′(96.): che perciò dividasi R per R′, e si abbia il quoziente Q″ e 'l residuo R″; dovrà tra questo residuo e 'l precedente R′ esservi anche lo stesso comun divisore che tra A, B; e così successivamente. Or se avvenga che quell' ultimo residuo R″ sia zero, allora il comun divisore tra R, R′ dovrà essere lo stesso R, ed è facile comprendere ch' essendo esso il massimo tra quelle grandezze, debba perciò essere ancora il *massimo comun divisore* tra A, B (96.).

99. E dal ragionamento tenuto nel precedente numero si ricaverà facilmente la seguente

## REGOLA.

100. *Volendo il massimo comun divisore tra due espressioni algebriche, bisogna dividere l' una di esse per l' altra, e poi questa pel residuo; ed indi questo residuo pel nuovo residuo, e così successivamente, finchè ottengasi per ultimo residuo il zero, nel qual caso l' ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato tra le quantità date.*

101. Se mai avvenga, che dopo un certo numero di quelle divisioni successive giungasi a tal residuo, che non possa affatto dividere il precedente; sarà questo il segno che le quantità proposte non abbiano comun divisore.

102. Conviene avvertire, per riguardo alla regola di sopra data, che ogni qual volta si ravvisi, in una delle espressioni, che fa da dividendo o da divisore, un qualche fattore di essa che non lo sia dell' altra, converrà supprimerlo, per render più semplice l' operazione (97.). Ed al contrario tutte le volte che si osservi, che nel cominciar qualcuna

delle successive divisioni, non si possa esattamente dividere il primo termine del dividendo per lo primo del divisore, converrà introdurre per fattore nel dividendo quella quantità che rende fattibile tal divisione. Le quali cose lo mostreranno assai meglio i seguenti esempj.

### Esempio I.

1° Div.$^e$ $\big\}\ a^3+a^2c-ab^2-b^2c$

Quant.dat. $\big\}\ a^3+abc-ab^2+b^2c-bc^2-ac^2$

Quoz. 1 $\quad a^3+a^2c-ab^2-b^2c$

1° Res. $\quad -a^2c+abc+2b^2c-bc^2-ac^2$

*div. per c*

2° Div.$^e$ $\big\}\ -a^2+ab+2b^2-bc-ac$

Quoz. $-a$

$a^3-a^2b-2ab^2+abc+a^2c$

2° Res. $\quad +a^2b+ab^2-abc-b^2c$

*div. per b*

3° Div.$^e$ $\big\}\ +a^2+ab-ac-bc$

Quoz. $-1$

$-a^2-ab+ac+bc$

3° Res. $\quad 2ab-2ac+2b^2-2bc$

cioè $\quad (2b-2c)\ (a+b)$

e quindi $\quad$ (97.) 4° Div.$^e$ $\big\}\ a+b$

Quoz. $a-c$

$+a^2+ab-ac-bc$

4° Res. $\quad 0$

Laonde il quarto divisore $a+b$, che dividendo il precedente $a^2+ab-ac-bc$ ha dato per 4° residuo *zero*, sarà il *massimo comun divisore* cercato tra le quantità proposte.

#### Spiega della precedente operazione.

103.I. Si è divisa l' una delle quantità date, quella a destra per l' altra a sinistra, e si è ottenuto per quoziente 1, del quale non si tien conto, come anche de' seguenti, che perciò non più nomineremo, e per

I°. residuo $\quad -a^2c+abc+2b^2c-bc^2-ac^2$

nel quale si è suppresso il fattore $c$, che non moltiplica l'altra espressione data (97.), sicchè esso è divenuto

$$-a^2+ab+2b^2-bc-ac$$

e per questo si è divisa l' altra espressione data, cioè quella a sinistra, che precedentemente aveva fatto da divisore; dalla quale divisione è risultato il

II°. RESIDUO $a^2b+ab^2-abc-b^2c$

in cui si è suppresso il fattore $b$, e poi si è per esso diviso il precedente residuo, e si è così ottenuto per

III°. RESIDUO $2ab-2ac+2b^2-2bc$

cioè, scindendolo in fattori,

$$(2b-2c)(a+b)$$

E suppresso in questa espressione il fattore $(2b-2c)$, si è diviso il secondo residuo per $a+b$, la qual divisione eseguendosi senza residuo, dinota che $a+b$ sia il *massimo comun divisore* cercato.

104. La presente operazione avrebbe anche potuto terminare dopo essersi ottenuto il II° residuo, se d' allora si fosse riflettuto, che questo poteva scindersi ne' fattori $ab-bc$ ed $a+b$, nel qual caso suppresso il fattore $ab-bc$, si sarebbe trovata esattamente eseguibile la divisione del I° residuo per $a+b$; e perciò $a+b$ si sarebbe veduto, fin da questo punto, essere il massimo comun divisore tra le espressioni date. E ciò può servire a mostrare a' giovanetti di quanta importanza sia, ad abbreviare la ricerca del massimo comun divisore, il considerar bene le quantità su cui si operano le divisioni, per liberare a tempo l' una di esse da que' fattori monomj o polinomj che non sono comuni all' altra.

### Esempio II.

105. *Determinare il massimo comun divisore, se pur ve ne ha, tra le date quantità*

M $\quad x^6-x^5-4x^4+2x^3+5x^2-x-2$

N $\quad 6x^5-5x^4-16x^3+6x^2+10x-1$

*le quali veggonsi già ordinate per rapporto alla x.*

Si moltiplichi l' una quantità data M pel coefficiente 6 del primo termine dell' altra N, che non è fattore di questa; e poi un tal prodotto si divida per la N, si avrà il

I° RESIDUO $-x^5-8x^4+6x^3+20x^2-5x-12$

Indi la N si divida per questo *residuo*, dalla quale operazione risulta il

II° RESIDUO $-53x^4+20x^3+126x^2-20x-73$

Ed introdotto nel I° residuo il moltiplicatore 53 non fattore del II° residuo, si divida quello così apparecchiato per quest' altro, si avrà per

III° RESIDUO $-444x^4+192x^3+1080x^2-192x-636$

i cui termini liberati dal fattore comune 12, non fattore del II° residuo, esso riducesi a

$$-37x^4+16x^3+90x^2-16x-53$$

Or s' introduca nel II° *residuo* il fattore 37, il qual numero è, come si vede, il coefficiente del primo termine del III° residuo ridotto, e poi si esegua la divisione di quello, così apparecchiato, per quest' altro, si avrà il

IV°. RESIDUO $-108x^3-108x^2+108x+108$

che diviso per $-108$ si riduce ad

$$x^3+x^2-x-1.$$

E questo siccome divide esattamente il residuo precedente sarà perciò il massimo comun divisore tra le quantità proposte

### ESEMPIO III.

106. *Vogliasi il massimo comun divisore delle quantità date*

M $acd-bcd+acf-bcf+ad^2-bd^2+adf-bdf$

N $agc-bgc+agd-bgd+ahc-bhc+ahd-bhd$

È facile ravvisare che quella di esse dinotata da N possa scindersi ne' due fattori

$$\begin{cases} gc+gd+hc+hd \\ a-b \end{cases}$$

E siccome il primo di questi si può ancor esso scindere ne' due altri $g + h$, $c + d$; quindi è che si avranno i seguenti *Fattori della* N. $g + h$ , $c + d$ , $a - b$ de' quali chiaramente si vede che il primo non possa esser fattore della M; ond' è che si potrà comodamente supprimere , e quindi tentar la divisione dell' espressione M per ciascun degli altri due fattori $c + d$, $a - b$ della N , o pure pel prodotto loro . E poichè tal divisione fatta nell' un modo , o nell' altro riesce esattamente ; perciò il massimo comun divisore tra le quantità proposte sarà

$$(a - b)(c + d) \quad , \text{ ossia } \quad ac + ad - bc - bd$$

107. E questo esempio potrà anche servir di argomento ad osservare che non basta , perchè si possa liberare una delle quantità che occorrono nella ricerca del massimo comun divisore da qualche fattore , il vedere che tal fattore non lo sia dell' altra quantità corrispondente , tra le quali si dee eseguire una divisione ma bisogna pur avvertire , se tal fattore , essendo anch' esso suscettivo di scindimento in altri fattori , ve ne sia tra questi taluno che possa dividere l' altra quantità. Di fatti , se nelle quantità quassù proposte , si fosse suppresso il fattore $gc + gd + hc + hd$ della N , perchè esso non divideva la M , si sarebbe trovato essere solamente $a - b$ il comun divisore delle quantità M , N , mentre effettivamente l' è $(a - b)(c + d)$ ; e ciò perchè potevasi l' espressione $gc + gd + hc + hd$ scindere anch' essa ne' fattori $(c + d)(g + h)$, de' quali $c + d$ l' è divisore della M.

108. Non fia inutile qui avvertire , che l' operazione praticata negli esempj precedenti , riguardo ad apparecchiare il dividendo con qualche convenevol moltiplicatore , perchè il quoziente venghi espresso per un intero , potrebbe anche tralasciarsi , senza che ne risulti altro inconveniente che quello di aver fratti nella continuazione dell' operazione. Di fatti se le espressioni proposte fossero

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad \text{e} \quad -2x^2 + 5x - 3$$

Eseguendo la divisione della prima di esse per la seconda si ha per quoziente $-\frac{x}{2}$, che moltiplicato pel divisore, e sottratto il prodotto dal dividendo, dà per residuo

$$-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x}{2}-2$$

il quale continuato a dividere per lo stesso divisore, e quindi il suo primo termine per $-2x^2$, si ha per quoziente $\frac{3}{4}$, e poi l' altro residuo

$$-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}, \quad \text{o sia} \quad -x+1,$$

supprimendo in esso il fattore comune $\frac{1}{4}$. E dividendo il divisore di poc' anzi per quest' ultimo residuo; dal nuovo residuo zero derivante da tal divisione, si rileverà che sia $-x+1$ il massimo comun divisore tra le quantità proposte.

109. E tutte le cose finora avvertite sembranmi sufficienti per le operazioni a fare nella ricerca del massimo comun divisore: l' esercizio poi confermerà tali regole nell' animo de' giovani, e farà loro conoscere senza stento i ripieghi che dovranno adoperare secondo le circostanze diverse.

# CAPITOLO VII.

## Delle frazioni continue.

110. Siccome è nostro intendimento, che gli Elementi di *Analisi algebrica*, che ora diamo, menino per dritta via alle ricerche le quali si dovranno poi stabilire trattando la parte sublime dell' Analisi stessa, così non abbiamo stimato fuori proposito di abbozzar quì i principii generali della teorica delle frazioni continue, che ivi poi avremo occasione di ripigliare e terminare. Nè questa idea di trattar delle frazioni continue, per la parte loro più elementare, nell' *Algebra de' finiti* è nuova; ma essa trovasi adottata in quasi tutte le migliori istituzioni di sommi analisti moderni. Ad ogni modo ci si farà abbastanza ragione di avervela introdotta, il non lasciarla senza applicazione in appresso nel presente trattato.

111. Sia il fratto vero $\frac{m}{n}$, ed in esso dividasi pel numeratore $m$ ciascun de' suoi termini, si avrà

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$$

ove $\frac{n}{m}$ essendo un fratto spurio, sia perciò uguale a $q+\frac{r}{m}$;

che però sarà $$\frac{m}{n}=\frac{1}{q+\frac{r}{m}}$$

Similmente dividendo per la $r$ ciascun de' termini del fratto $\frac{r}{m}$

sarà $\frac{r}{m}=\frac{1}{\frac{m}{r}}=\frac{1}{q'+\frac{r'}{r}}$, supponendo che la $m$ divisa per la $r$ dia per quoziente $q'$, e per residuo $r'$; ond' è che si avrà

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{r'}{r}}}$$

E continuando la stessa operazione sul fratto $\frac{r'}{r}$, chiamando $q''$ il nuovo quoziente, ed $r''$ il nuovo residuo, si avrebbe

$$\frac{m}{n}=\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{r''}{r'}}}}$$

E così in seguito

112. Or ogni specie di espressione frazionaria di questa fatta, o anche più generale, come

$$\cfrac{a}{q+\cfrac{b}{q'+\cfrac{c}{q''+\cfrac{d}{q'''+\cfrac{e}{q''''+\ldots}}}}}$$

nella quale il denominatore della prima quantità intera è un binomio di una parte intera e di un' altra frazionaria, e 'l denominatore di questa anch' esso costa di una parte intera e di un' altra frazionaria, e così in seguito, si dice *Frazione continua* [13].

---

[13] Un tal modo utilissimo e spedito di approssimazione, come si vedrà, fu escogitato dal visconte e barone *Brouncker*, all' occasione di alcune progressioni ottenute dal *Wallis*, tra le quali quella per la quadratura del cerchio, ed a lui inviate, indicandogliene la legge come procedevano, ad oggetto di vedere se potesse rinvenire qualche mezzo di una più comoda espressione (*Vegg.* l' Arithmet. infin. *del Wallis nell'* aliter *della prop. 191.*)

113. Noi quì non considereremo, che semplicemente le frazioni continue della prima forma di sopra esibita (111.); poichè quelle sole occorrono frequentemente nell' Analisi algebrica, ed anche perchè dalle ricerche le quali si stabiliscono per questo caso particolare è facil cosa passare all' altro.

114. Si comprende facilmente, che se invece di prendere per $q$, $q'$, $q''$, $q'''$, .... i massimi numeri interi contenuti ne' fratti $\frac{n}{m}$, $\frac{m}{r}$, $\frac{r}{r'}$, $\frac{r'}{r''}$, .... si fosse preso per ognuna di essi il numero di un' unità maggiore, e quindi il primo a superare que' fratti stessi, allora i residui delle divisioni, cioè $r$, $r'$, $r''$, $r'''$, .... avrebbero dovuto risultar negativi, e la frazione continua avrebbe avuta la seguente forma

$$\cfrac{1}{q-\cfrac{1}{q'-\cfrac{1}{q''-\cfrac{1}{q'''-\ldots}}}}$$

Ed è pur chiaro, che prendendo taluni di que' $q$, $q'$, $q''$, $q'''$, .... per difetto, ed altri per eccesso, risulterebbero positivi i valori di quelli tra essi $q'$, $q''$, $q'''$, .... corrispondenti a que'primi casi, e negativi pe' secondi; talchè se $q'$ si era preso maggiore di un' unità del quoziente intero del fratto corrispondente, il fratto $\frac{1}{q''}$ risulterebbe negativo.

Ma poichè è in arbitrio dell' analista il far risultare que' quozienti $q'$, $q''$, $q'''$ ... tutti positivi, e che solo in qualche caso non ovvio si ricorre a quozienti negativi, per rendere la frazione continua di più celere convergenza: è però che nella sola forma sopraddetta noi imprenderemo a trattare una frazione continua.

115. Dall' andamento stesso di una frazione continua risulta chiaramente, ch' essa offra di continuo un' approssimazione del valore di quel fratto ordinario che rappresenta;

poichè non si fa altro per ottenerla, che prendere continuamente i valori in intero più prossimi a quel fratto proposto, ed alle altre frazioni successive in cui esso si svolge con l'operazione indicata nel num. 111. Giova però riflettere, che una tale approssimazione sempre crescente l'è alternativamente per eccesso e per difetto dal vero valore della frazione continua, ossia dalla quantità ch'essa rappresenta; il che quasi intuitivamente si rileva dalla semplice ispezione di quella che si è recata in fine di tal §.

Di fatti si vede, che arrestandosi al solo termine $q$ del primo denominatore della frazione continua, debba essere $\frac{m}{n} < \frac{1}{q}$, mentre il denominatore $q$ doveva essere aumentato di $\frac{1}{q'}$; e però si troverà la quantità $\frac{1}{q}$ esprimere in *più* il valore di essa frazione. Al contrario aggiugnendosi al denominatore $q$ la sola quantità $\frac{1}{q'}$, essendo il denominatore $q' < q' + \frac{1}{q''}$ sarà $\frac{m}{n} >$ del fratto $\frac{1}{q + \frac{1}{q'}}$, e questo minore di $\frac{1}{q + \frac{1}{q' + \frac{1}{q''}}}$ ..; ond'è che l'approssimazione di quel fratto al valore $\frac{m}{n}$ dell'intera frazione continua in cui si sviluppa sarà in *meno*, sebbene l'approssimazione sia prodotta un grado più in là della precedente. E così sempre alternandosi in appresso.

116. Dall'esposto nel paragrafo 111. si rileva pure, che l'operazione da farsi per lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua sia assolutamente la stessa che quella della ricerca del massimo comun divisore tra il numeratore e 'l denominatore del medesimo, tenendo però pre-

cisamente conto nella prima delle suddette operazioni di que' quozienti $q$, $q'$, $q''$, $q'''$, .... delle successive divisioni che debbon farsi, i quali disprezzavansi nell' altra.

117. Sicchè volendo svolgere in frazione continua il fratto $\frac{11}{14}$, ch' esprime, com' è noto, il rapporto assegnato da Archimede di un cerchio al quadrato del diametro[14], bisognerà dividere

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 per 11, | e sarà | $q \;\; = 1$, | $r \;\; = 3$ |
| 11 per 3, | che darà | $q' \;\, = 3$, | $r' \;\, = 2$ |
| 3 per 2, | che dà | $q'' = 1$, | $r''' = 1$ |
| 2 per 1, | d' onde si ha | $q'' = 2$, | $r'' = 0$. |

E la frazione continua richiesta risulterà

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

E da ciò ognuno potrà da se medesimo rilevare la regola per lo svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua.

118. Or siccome nella ricerca del massimo comun divisore tra due numeri dee sempre pervenirsi ad un residuo che divida esattamente il precedente, il quale se non ve ne sia altro sarà l' 1: perciò si vede chiaramente che, nello svolgimento di un fratto ordinario in frazione continua, l' operazione debba una volta arrestarsi. E di fatti in quella recata nel numero precedente essa si è arrestata al quoziente $q'''$, cioè alla quarta divisione.

119. Adunque ogni frazione continua derivante da un fratto ordinario dee esser terminata. Non così per quelle derivanti da quantità irrazionali, che come vedremo in appresso procedono indefinitamente.

120. Dopo aver considerato il problema diretto di svol-

[14] *Circuli dimensio* prop. 1.

gere un fratto ordinario in frazione continua, ci resta ora a vedere come si pervenga alla risoluzione dell' altro inverso, col quale si propone a ridurre in fratto ordinario una frazione continua proposta; pel quale oggetto richiedesi di determinar la legge con la quale procedono le frazioni volgari ottenute successivamente da una frazione continua; poichè allora avutasi quella di un grado, si potrà subito ottenere l' altra del seguente.

121. Sia dunque la frazione continua

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\ldots}}}}}$$

sarà

$$\frac{1}{a} \ldots\ldots = \frac{1}{a}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}} \ldots = \frac{b}{ab+1}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} \ldots\ldots = \frac{bc+1}{abc+a+c}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}} \ldots\ldots = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e\ldots}}}}} \ldots\ldots = \frac{bcde+be+de+bc+1}{abcde+abe+ade+cde+abc+a+c+e}$$

delle quali frazioni facilmente si ravvisa la seguente legge, che fa dipendere sempre l' una dalle due precedenti, cioè:

122. *Ciascun numeratore si ottiene aggiugnendo all' ante-precedente ad esso il precedente moltiplicato per la lettera o quantità, ch'esprime l'ultimo denominatore nella frazione continua da ridursi.*

Così arrestandosi al quoziente $d$, si otterrà il numeratore del fratto corrispondente alla frazione continua

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

aggiugnendo al numeratore $b$ dell'anteprecedente frazione l'altro $bc + 1$ della precedente moltiplicato per $d$.

123. E la stessa legge avrà luogo per la formazione de' respettivi denominatori, cioè:

*Ciascun denominatore si otterrà aggiugnendo all' anteprecedente ad esso il precedente moltiplicato per la nuova lettera, o quantità, ch' esprime l' ultimo denominatore nella frazione continua da ridursi* [15].

---

[15] Eulero avendo voluto estendere questa legge per la formazione de' numeratori e denominatori de' successivi fratti ordinarii corrispondenti ad una frazione continua, anche a' due primi di essi, si vide nella necessità di stabilire precedentemente a quella parte della frazione continua che si arrestava al primo denominatore intero, cioè nel caso nostro ad $\frac{1}{a}$, due altre frazioni $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, con le quali si vede verificarsi la legge suddetta per $\frac{1}{a}$, e per $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}$. Ma una tal supposizione è assolutamente da rigettarsi, come priva di fondamento nel calcolo attuale. D'altronde la forma di queste due frazioni è intuitiva; e poi la regola stessa dimostra che la ricorrenza non debba aver luogo che dalla terza di esse in poi.

124. Ma per dimostrar vera una tal legge generalmente, passeremo a far vedere, che supposto aver essa luogo fino alla frazione corrispondente ad un certo denominatore della frazione continua, debba necessariamente aver anche luogo per la frazione seguente; e quindi per tutte le frazioni, fino a quella che si vuole, e ch' è l' ultima.

125. Sieno dunque $q, q', q'', q'''. \dots$ [16] $q^{(n-II)}, q^{(n-I)}, q^{(n)}$ i denominatori successivi della frazione continua, e sieno $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''} \dots \frac{a^{(n-II)}}{b^{(n-II)}}, \frac{a^{(n-I)}}{b^{(n-I)}}, \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$ le frazioni volgari successive provvenute da questa frazione continua fino ai rispettivi denominatori $q, q', q'', \dots$ Si avrà (121.).

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{a'}{b'} = \frac{q'}{qq'+1}$$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{q'q''+1}{qq'q''+q''+q} = \frac{a'q''+1}{b'q''+b}$$

E similmente

$$\frac{a'''}{b'''} = \dots\dots = \frac{a''q'''+a'}{b''q'''+b'}$$

$$\frac{a''''}{b''''} = \dots\dots = \frac{a'''q''''+a''}{b'''q''''+b''}$$

. . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{a^{(n-I)}}{b^{(n-I)}} = \dots\dots = \frac{a^{(n-II)}q^{(n-I)}+a^{(n-III)}}{b^{(n-II)}q^{(n-I)}+b^{(n-III)}}$$

Or vuolsi mostrare che la frazione seguente, la quale corrisponde alla frazione continua fino al denominatore $q^{(n)}$,

---

[16] Le $^{(n-II)}$, $^{(n-I)}$, $^{(n)}$ sono destinate a dinotare il grado del quoziente; e così pure qui appresso.

cioè l' $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$ debba necessariamente essere espressa secondo la legge stessa delle precedenti da $\frac{a^{(n-I)}q^{(n)}+a^{(n-II)}}{b^{(n-I)}q^{(n)}+b^{(n-II)}}$.

Di fatti quella frazione penultima $\frac{a^{(n-I)}}{b^{(n-I)}}$, si cambia in quest' ultima $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$ quando si sostituisca in quella in vece di $q^{(n-I)}$ la $q^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}$; che perciò sarà

$$\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}=\frac{\left(q^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}\right)a^{(n-II)}+a^{(n-III)}}{\left(q^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}\right)b^{(n-II)}+b^{(n-III)}}$$

$$=\frac{a^{(n-II)}q^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}a^{(n-II)}+a^{(n-III)}}{b^{(n-II)}q^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}b^{(n-II)}+b^{(n-III)}}$$

$$=\frac{a^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}a^{(n-II)}}{b^{(n-I)}+\frac{1}{q^{(n)}}b^{(n-II)}}$$

espressione che consente con la legge di sopra stabilita; è però questa rimane generalmente dimostrata.

126. Che se prendansi le differenze successive delle *frazioni consecutive ridotte* del §. 121, cioè tra la prima $\frac{1}{a}$, e la seconda $\frac{b}{ab+1}$; tra questa e la terza $\frac{bc+1}{abc+a+c}$, e così in appresso, risulteranno tali differenze espresse da frazioni il cui numeratore è l' unità, e 'l denominatore l' è quanto il pro-

dotto de' denominatori delle corrispondenti frazioni ridotte, e però sempre crescenti, mentre gli elementi da cui risultano sono numeri interi; ed in oltre si troveranno tali differenze alternativamente positive, e negative, cioè sarà positiva la differenza tra la prima e la seconda *frazione ridotta*, negativa quella tra la seconda e la terza, e così in appresso. Da che di nuovo risultano le due verità già rilevate nel §.115, per l' approssimazione successiva sempre maggiore della frazione continua alla quantità dalla quale si sviluppa, in *più* arrestandosi a quozienti impari, in *meno* a' pari.

127. Risulta ancora dalle anzidette cose, che tutte le frazioni volgari, che pareggiano la frazione continua a diversi gradi di essa, debbano essere irriducibili, cioè debbano avere i loro termini primi tra loro; potendo solamente non esserlo l' ultima di quelle, la quale rappresenta l' intera frazione continua terminata, nel caso che questa fosse derivata da un fratto suscettivo di riducimento a minimi termini. Poichè indicando con $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{T}$ due di tali frazioni successive, sarà $PT - QR$ il numeratore della loro differenza, che essendosi veduto risultar sempre 1, indipendentemente dal segno, non dovrà però esservi fattore comune tra $PT$, e $QR$, come avverrebbe se ve ne fosse tra $P$, $Q$, o $R$, $T$. Che però i fratti $\frac{P}{Q}$ ed $\frac{R}{T}$ dovranno essere irriducibili.

128. Or dovendo una qualunque delle *frazioni ridotte* aver *primi* i suoi termini, ed esser quindi insuscettiva di simplificazione, ne segue che sia impossibile l' assegnarne un' altra che ne sia minore, senza accrescerne il denominatore. E però non esser possibile assegnare una frazione che ad un dato grado si approssimi alla frazione continua con minor denominatore della frazione ridotta corrispondente.

129. Col metodo stesso del §.117 si potrà svolgere in frazione continua qualunque quantità radicale, dopo la ridu-

zione in decimale [17]. Ma siccome tal valore in decimali non può essere che approssimativo, talchè accrescendosi di 1 l' ultima cifra del decimale si hanno due limiti tra i quali dee trovarsi il valor vero della quantità proposta; bisognerà perciò, per contenersi tra questi limiti, eseguire lo sviluppo in frazione continua sulle due frazioni che rappresentano tali limiti, e non prender per termini della frazione continua cercata, che solamente quelli che risultano identici in que' due sviluppi.

130. Così volendo svolgere in frazione continua $\sqrt{2}$, che ridotto in decimale è 1,4142135 . . . . ., si vedrà che arrestandosi solo a quattro cifre di quel decimale, cioè ad 1,4142, i limiti del fratto da svilupparsi cioè della frazione continua corrispondente a $\sqrt{2}$ saranno 1,4142, ed 1,4143. Or il primo di quei fratti dà la frazione continua

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}$$

e l' altro si svolge nella seguente

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}},$$

le quali due frazioni continue sono differenti nel quinto loro

[17] E lo stesso potrebbe anche aver luogo per una qualunque quantità di quelle dette *trascendenti*, che dovremo considerare al loro luogo.

termine : sicchè, se la frazione continua corrispondente a $\sqrt{2}$ si volesse svolgere al di là del quarto termine, allora non basta arrestare a diecimilesimi il fratto decimale rappresentante $\sqrt{2}$, ma bisogna svilupparlo oltre.

131. Un tale sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua si potrebbe anche ottenere senza la preventiva riduzione del radicale in fratto decimale, nel seguente modo.

Poichè $\sqrt{2}$ è maggiore di 1 per una frazione, sia questa rappresentata da $\frac{1}{z}$; sarà $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{z}$, e però $\frac{1}{z} = \sqrt{2} - 1$, e quindi $z = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{z}$; sicchè per ora sarebbe $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{z}}$: e continuando a sostituir sempre per $z$ lo stesso suo valore poc' anzi determinato, si vedrebbe il $\sqrt{2}$ svilupparsi in una frazione continua *periodica*, come quella esposta nel §. 130.

E più generalmente sviluppando collo stesso metodo la quantità irrazionale $\sqrt{a^2+1}$ si troverà la frazione continua periodica

$$\sqrt{a^2+1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \ldots}}}}}$$

132. E volendo tradurre in fratti ordinarii le frazioni continue di diverso grado esprimenti $\sqrt{2}$, per ottener così diversi gradi di approssimazione di un tal radicale, si troverà essere i seguenti

$$1 + \left[ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169}, \ldots \right]$$

cioè $\quad \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots$

le quali frazioni ridotte in diecimilionesime, e paragonate col fratto decimale di ugual grado 1, 4142135 $= \sqrt{2}$ daranno

| | | |
|---|---|---|
| I.° | $\frac{3}{2} = 1{,}5000000$ | *differenza in più* |
| II°. | $\frac{7}{5} = 1{,}4000000$ | . . . . . *in meno* |
| III.° | $\frac{17}{12} = 1{,}4166667$ | *differenza in più* |
| IV°. | $\frac{41}{29} = 1{,}4137931$ | . . . . . *in meno* |
| V°. | $\frac{99}{70} = 1{,}4142857$ | . . . . . *in più* |
| VI°. | $\frac{239}{169} = 1{,}4142012$ | . . . . . *in meno* |
| VII°. | $\frac{577}{408} = 1{,}4142156$ | . . . . . *in più* |
| VIII.° | $\frac{1393}{985} = 1{,}4142132$ | . . . . . *in meno*, ma |

nell' ultima cifra decimale.

133. Ed è poi chiaro che la frazione continua in cui si sviluppa $\sqrt{2}$ non debba mai terminare, come l' è in generale di tutte quelle che derivano da quantità radicali. Ma a dimostrar generalmente un tale assunto impiegheremo i seguenti paragrafi.

### L e m m a.

134. *Il prodotto di due, tre, o più numeri primi non può avere per fattori altri numeri primi diversi da quelli.*

Sieno $M,N$ due numeri primi, che diano il prodotto $MN$, di cui si supponga fattore il numero primo $P$: dico che $P$ sarà necessariamente o uguale ad $M$, o ad $N$.

Essendo $P$ un divisore esatto di $MN$, sia $Q$ il quoziente di

questa divisione, sarà $\frac{MN}{P} = Q$, d $\frac{N}{P} = \frac{Q}{M}$. Ma essendo $N$, $P$ numeri primi, la frazione $\frac{N}{P}$ è ridotta a' suoi minimi termini; quindi i termini dell' equivalente frazione $\frac{Q}{M}$, o debbono essere uguali rispettivamente a quelli della frazione $\frac{N}{P}$, o rispettivamente ugual moltiplici di questi. Ma $M$ non può essere un moltiplice di $P$, poichè numero primo; adunque gli sarà uguale, e perciò anche $Q$ dovrà pareggiare $N$.

Sieno ora tre i fattori primi del prodotto $MNX$, cioè $M$, $N$, $X$; e suppongasi benanche esser $P$ un numero primo divisore di $MNX$, e sia $\frac{MNX}{P} = Q$, sarà $\frac{MN}{P} = \frac{Q}{X}$. Or nel fratto $\frac{MN}{P}$ essendo primi i numeri $M, N, P$ non vi può essere comun divisore tra $MN$ e $P$, che perciò esso è ridotto a minimi termini; e nell' altro $\frac{Q}{X}$ essendo $X$ numero primo, non può essere un moltiplice di $P$. Adunque dovrà essere $X = P$, e $Q = MN$. E nel modo stesso si continuerebbe la dimostrazione per un più gran numero di fattori.

135. Cor. 1. Quindi il prodotto di più numeri primi dee esser primo per riguardo al prodotto di altri numeri primi diversi da' precedenti.

136. Cor. 2. E perciò i quadrati di due numeri primi debbono essere numeri primi tra loro. Ed in generale tali debbono essere le potenze $n$ de' medesimi.

137. Cor. 3. Ed è facile anche rilevare, che un numero $N$ non primo debba risultare dal prodotto o di numeri primi, o di loro potenze, cioè essere $= a^n b^p c^q$ .... Da che si rileva il modo di determinare i fattori *semplici* e *composti* di un numero qualunque N, il qual modo quì incidentemente esporremo.

138. *Si tenti la divisione di $N$ per ciascun de' numeri primi 2, 3, 5, 7, 11 . . . e supposto che succeda per un di essi, che s' indichi per $a$, si ritenti successivamente quella del quoziente ottenuto per $a$, poi nel nuovo quoziente ancora per $a$, e così sempre finchè non più possa eseguirsi esattamente tal divisione : e supposto che essa abbia avuto luogo $n$ volte, e che l' ultimo quoziente sia $Q$, sarà $N = a^n Q$. Or non potendo $Q$ esser divisibile pel numero primo $a$, nè tampoco può esserlo per un altro minore di $a$, poichè altrimenti questo avrebbe dovuto ancora dividere $N$, il che dalle precedenti operazioni erasi osservato non poter avvenire. Adunque potrà $Q$ esser solo divisibile per altri numeri primi maggiori di $a$ ; e ripetute su $Q$ le stesse operazioni precedenti risulti divisibile $p$ di volte successivamente per $b$, sarà $Q = b^p Q'$. E similmente ritrovando $Q' = c^q Q''$, ... si avrebbe $N = a^n b^p c^q Q''$. E così in appresso se $Q''$ fosse ancor esso divisibile per qualche altro numero primo maggiore di $a, b, c$.*

E si vede ancora, che debba $N$ risultar divisibile pel prodotto di que' numeri primi, o delle loro potenze fino ad $n, p, q$, comunque combininsi tali fattori, come per $ab$, $ac$, $bc$, $abc$, $a^2b$, $a^2c$, $b^2c$, $a^2bc$. . .

TEOREMA.

139. *Se la radice $n$ di un numero intero $M$ non sia un intero* [18], *non potrà nè anche essere un fratto.*

S' è possibile, sia in quest' ultimo modo, e tal fratto ridotto a minimi termini venghi espresso da $\frac{P}{Q}$ ; sarà $\frac{P^n}{Q^n} = M$. Ma essendo numeri primi $P$, $Q$, sono anche primi tra loro

---

[18] Cioè se $a$ non è potenza esatta del grado della radice che se ne vuole estrarre.

$P^n$, $Q^n$ (136.), che perciò $Q^n$ non potrà mai dividere esattamente $P^n$. Adunque è falso esser $\frac{P^n}{Q^n} = M$.

140. Da ciò si vede, che le quantità radicali non sieno suscettive di unità comune qualunque intera o frazionaria anche piccolissima, d' onde resta loro confermata la natura d' *incommensurabili* : ed incommensurabile è pure ogni qualunque rapporto di cui un termine, o tutti i due già ridotti contengano quantità radicali, come per esempio di 1 : $\sqrt{2}$, ch' esprime il rapporto del lato del quadrato alla diagonale ; e di $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, ch' è quello del lato del quadrato al lato del triangolo equilatero iscritti in uno stesso cerchio.

141. Abbiamo quì recata la dimostrazione dell'incommensurabilità de' radicali, per la ragione che in talune istituzioni, anche di Geometria Elementare, si costuma oggigiorno di stabilire l' incommensurabilità del rapporto tra la diagonale, e 'l lato del quadrato col dire, che dinotandosi il lato del quadrato per 1, la diagonale si trovi espressa da $\sqrt{2}$, d' onde non si può estrarre la radice; senza avvertire che bisognava prima generalmente dimostrare una tale impossibilità, altrimenti potrebbe avvenire quello che nota il Montucla di un certo ingegner francese, che cercando sempre, e sperando ottenere la radice di 2, aveva protratta l' approssimazione fino ad un decimale di 100 cifre [19]. Ed il Legendre mentre nella sua *Geometria* vi procede in tal modo, ne dà poi la dimostrazione rigorosa nell'*Essai sur la théorie des nombres*, a pag. 4.

[19] Histoire des Mathématiques *part. I. lib.* IV. *num.* 2.

## CAPITOLO VIII.

### De' radicali immaginarii, e del loro calcolo.

142. Se $M$ dinoti una potenza pari di $\pm A$, sicchè sia $M = \pm A^{2n}$, non potrà mai $M$ risultare affetta dal segno — (44.); che perciò vicendevolmente $-M$ non potrà mai rappresentare una qualunque potenza pari di $\pm A$, cioè che da $-M$ non potrà estrarsi radice di grado pari; e quindi $\sqrt[2n]{-M}$ esprimerà una quantità impossibile, o *immaginaria*, come suol chiamarsi. Adunque:

143. Def. Si dice quantità *immaginaria* quel radicale che ha l' indice pari, e negativa la quantità sotto il segno.

144. Sebbene $-A^{2n}$ non possa aver luogo come potenza di $\pm A$, può però dinotare il prodotto di un fattore positivo di essa $-A^{2n}$ per un altro negativo, per esempio di $+A^{2n}$ per $-1$; che perciò, se mai l' espressione immaginaria $\sqrt[2n]{-M}$ si elevi alla potenza $2n$, venendosi a distruggere con una operazione contraria l' operazione impossibile ad eseguirsi sulla quantità $-M$, cioè l' estrazione della radice $2n$ da essa, la quantità $-M$ che tornerà a risultarne dovrà esser reale; e reali possono essere in altri casi ancora, che appresso mostreremo, i risultamenti derivanti da calcolazioni effettuate su quantità immaginarie. Che perciò il loro calcolo non è da disprezzarsi, nè da credersi di nessun uso, e puramente chimerico; che anzi, come in più luoghi in appresso, principalmente nella teorica delle equazioni, si mostrerà, la considerazione degli immaginarii è di somma importanza nelle ricerche che si fanno per mezzo dell' Algebra su quistioni aritmetiche, e geometriche.

145. Intanto siccome l' importanza di questo calcolo si limita semplicemente a considerare i radicali quadratici im-

maginarii ; perciò non ci occuperemo qui appresso , che di essi solamente . E per ora avvertiamo , che le stesse regole che stabiliremo per quelli, si potrebbero estendere agl'immaginarii di qualunque grado si vogliano supporre, i quali tutti sono riducibili ad espressioni che contengano radicali immaginarii di secondo grado , come a suo luogo mostreremo.

146. È facile rilevare dal §. 68 che $\sqrt{-M}=\sqrt{M}\times\sqrt{-1}$, cioè che : *Ogni radicale immaginario è quanto lo stesso radicale reale moltiplicato per* $\sqrt{-1}$.

Ed in questa forma supporremo in appresso esser sempre ridotti gl'immaginarii nello stabilire le regole del loro calcolo.

Sicchè le quantità immaginarie , per esempio, $3\sqrt{-a^2}$ , e $5b\sqrt{-a}$, sarebbero rispettivamente rappresentate da $3a\sqrt{-1}$, e $5b\sqrt{a}\sqrt{-1}$.

147. La somma , e la sottrazione delle quantità immaginarie non ha bisogno di regole speciali , eseguendosi con quelle stesse già stabilite generalmente nel §. 60.

Così la somma delle quantità

| | |
|---|---|
| I$^a$ | $3a^2 + 2b\sqrt{-1} - 4c\sqrt{-1}$ |
| II$^a$ | $2p^2 + 3b\sqrt{-1} - 6c\sqrt{-1}$ |
| è | $3a^2 + 2p^2 + 5b\sqrt{-1} - 10c\sqrt{-1}$ |

o anche espressa nel seguente modo

$$3a^2 + 2p^2 + (5b - 10c)\sqrt{-1}$$

E sottraendo la seconda dalla prima , ne risulterà

$$3a^2 - 2p^2 - (b - 2c)\sqrt{-1}$$

148. Che se vogliasi moltiplicare la quantità reale $\pm a$ per l' immaginaria $\pm b\sqrt{-1}$ , il prodotto di tali quantità si ridurrà a quello de' tre fattori $\pm a$ , $\pm b$, e $\sqrt{-1}$ , de' quali il prodotto de' due primi è già noto essere $\pm ab$ ; e questo moltiplicato per $\sqrt{-1}$ darà pel prodotto delle quantità proposte $\pm ab\sqrt{-1}$.

Che se poi i fattori sieno tutti due immaginarii , come $\pm a\sqrt{-1}$ , e $\pm b\sqrt{-1}$ , il prodotto de' medesimi equivar-

rà a quello de' quattro fattori $\pm a$, $\pm b$, $+\sqrt{-1}$, $+\sqrt{-1}$; e sarà perciò quanto quello de' due primi per lo prodotto de' due ultimi. Ma i due primi moltiplicandoli giusta la regola data di sopra danno $\pm ab$, secondochè tali fattori si prendano con gli stessi segni, o pur contrarii; e gli altri due essendo identici danno il quadrato di $\sqrt{-1}$, cioè $-1$. Adunque quel prodotto delle quantità poste da principio sarà $\pm ab \times -1$ ossia $\mp ab$; ove il segno $-$ si trova aver luogo quando i fattori dati erano del segno stesso, il $+$ se diversi nel segno. Da ciò si rileva che:

*Il prodotto di due quantità immaginarie è reale, e precisamente quanto quello de' fattori proposti presi come reali, invertendo però la regola pe' segni stabilita per la moltiplicazione nel §.45. cioè dando al prodotto il segno — quando i fattori sono affetti dal segno stesso, e 'l segno + se da contrario segno* [**].

149. In oltre sia proposto a dividere la quantità immaginaria $\pm a\sqrt{-1}$ per l'altra $\pm b$, è chiaro che il quoziente cercato sarà immaginario, ed espresso da $\pm \frac{a}{b}\sqrt{-1}$. Che se al contrario sia reale il dividendo $\pm a$, ed immaginario il divisore $\pm b\sqrt{-1}$; il quoziente sarà pure immaginario, ed espresso da $\pm \frac{a}{b\sqrt{-1}}$, ove moltiplicando per $\sqrt{-1}$ i due termini del fratto, si avrà $\pm \frac{a\sqrt{-1}}{-b} = \mp \frac{a}{b}\sqrt{-1}$. Val quanto dire che:

---

[**] Dal qui esposto, ciascuno potrà giudicare con quanto poco fondamento l'accuratissimo Wolfio abbia detto, trattando della moltiplicazione degli immaginarii tra loro, che il prodotto sotto il segno $\sqrt{}$ doveva avere il $-$, per la ragione, che: *alias enim factores immaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum.* (*sch.* probl. 13. *Elem. Analyt.*). Ed a questo proposito conviene anche far notare a' giovani, come l' ha fatto il Lhuilier, una inavvertenza nell' *Algebra* dell' Eulero (§.148. vol. I.) trovandosi detto, che $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$, invece di $-\sqrt{6}$, e $\sqrt{-1} \times \sqrt{-4} = 2$, invece di $-2$.

*Volendo dividere una quantità immaginaria per un' altra reale, o al contrario una quantità reale per un' immaginaria, si esegue la divisione senza considerare l' immaginaria come affetta da* $\sqrt{-1}$ *, pel quale si moltiplichi il quoziente, cambiando a questo il segno, che gli era venuto dalla divisione fatta, nel caso che l' immaginaria quantità avesse fatto da divisore.*

Finalmente sieno immaginarii ad un tempo stesso il dividendo e 'l divisore, ed espressi l' uno da $\pm a\sqrt{-1}$, e l' altro da $\pm b\sqrt{-1}$, *il quoziente* sarà indicato da

$$\pm\frac{a}{b}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\pm\frac{a}{b}\times+1=\pm\frac{a}{b}$$

cioè: *Il quoziente della divisione di due quantità immaginarie è reale, e dinotato dal quoziente che si avrebbe dividendo alla maniera ordinaria i radicali proposti, suppresso il fattore comune* $\sqrt{-1}$.

150. Dopo ciò basteranno per le operazioni su i polinomii immaginarii i seguenti esempli.

PER LA MOLTIPLICAZIONE.

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll}\textit{Fattori}\left\{\begin{array}{l}3m+2a\sqrt{-1}-3\sqrt{b}\sqrt{-1}\\ 2m-3a\sqrt{-1}+2\sqrt{b}\sqrt{-1}\end{array}\right. & \\ \hline & 6m^2+4am\sqrt{-1}-6m\sqrt{b}\sqrt{-1}\\ & \quad -9am\sqrt{-1}+6a^2-9a\sqrt{b}\\ & \qquad +6m\sqrt{b}\sqrt{-1}-4a\sqrt{b}+6b\\ \hline \textit{Prodotto} & 6m^2-5am\sqrt{-1}+6a^2-13a\sqrt{b}+6b\end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{ll}\textit{Fattori}\left\{\begin{array}{l}x\pm a+b\sqrt{-1}\\ x\pm a-b\sqrt{-1}\end{array}\right. & \\ \hline & x^2\pm ax+bx\sqrt{-1}\\ & \quad\pm ax+a^2\pm ab\sqrt{-1}\\ & \qquad -bx\sqrt{-1}\mp ab\sqrt{-1}+b^2\\ \hline \textit{Prodotto} & x^2\pm 2ax+a^2+b^2\end{array}\right.$$

Il qual prodotto è reale, e nascente da due fattori immaginarii della soprindicata forma.

### Per la divisione.

| *Divisore* | *Dividendo* |
|---|---|
| $3m+2a\sqrt{-1}-3\sqrt{b}\sqrt{-1}$ | $6m^2-5am\sqrt{-1}+6a^2-13a\sqrt{b}+6b$ |
| $2m-3a\sqrt{-1}+2\sqrt{b}\sqrt{-1}$ | $6m^2+4am\sqrt{-1}-6m\sqrt{b}\sqrt{-1}$ |
| | $-9am\sqrt{-1}+6a^2+6m\sqrt{b}\sqrt{-1}-13a\sqrt{b}+6b$ |
| | $-9am\sqrt{-1}+6a^2 \qquad -9a\sqrt{b}$ |
| | $+6m\sqrt{b}\sqrt{-1}-4a\sqrt{b}+6b$ |
| | $+6m\sqrt{b}\sqrt{-1}-4a\sqrt{b}+6b$ |
| | $0$ |

**151.** Da tutte le operazioni esposte intorno ai radicali immaginarii, è facile rilevare, che raccogliendo in una somma tutt' i termini reali di un' espressione immaginaria, ed indicandoli per $A$; e similmente chiamando $B$ la somma de' coefficienti di $\sqrt{-1}$ ne' termini immaginarii; potrà ogni espressione algebrica immaginaria essere generalmente compresa nella formola $A \pm B\sqrt{-1}$. Ma sopra di ciò dovremo ritornare in appresso, e rendere anche più generale tal proposizione.

# CAPITOLO IX.

## Dell' elevazione a potenza, e dell' estrazione di radice dalle quantità algebriche.

152. Si è già detto nel §.27. cosa intendasi per *potenza*, e per *radice* di una data quantità, e come questa s' indichi col segno $\sqrt{}$, nell' apertura della quale va scritto quel numero che dinota l' ordine, o il grado della radice. Ciò che fu poi detto nel §. 34 mostra ben la regola da seguirsi per elevare a potenza, o per estrarre la radice di qualsivoglia grado da una quantità monomia, le quali due regole per maggior chiarezza noi quì, come nel proprio luogo, daremo più generalmente.

### REGOLA I.

153. *Si eleva un monomio a potenza, eseguendo tal potenza pel coefficiente, e moltiplicando l' esponente di ciascun fattore letterale di quel monomio per l' indice della potenza cui dee esso elevarsi, prefiggendo a questa potenza, se impari il segno della quantità data, se pari sempre il segno* $+$.

### REGOLA II.

154. *Si estrarrà da un monomio una determinata radice, estraendola dal coeffieiente di esso, e dividendo l' esponente di ciascun fattore letterale di quel monomio per l' indice della radiee proposta ad estrarre, col dare a questa il segno della quantità data, se di grado impari, e se di grado pari il dubbio segno* $\pm$.

155. E s' intende già, per le due precedenti regole, che se la quantità data era una frazione, l' operazione suddetta debba ugualmente eseguirsi ne' due termini della medesima:

ed essendo quantità radicali convien valersi a proposito delle regole date nel §. 37.

156. Poste le precedenti generali considerazioni sulle potenze, e radici de' monomii algebrici, passeremo a trattar lo stesso argomento pe' polinomii, supponendo però, per la seconda di tali operazioni, che la quantità polinomia proposta sia potenza perfetta del grado che indica la radice che di essa si cerca.

157. Or da ciò che fu detto nel §. 34, la potenza di un polinomio è quel prodotto di fattori identici ad esso, tanti di numero, quante unità sono nel grado della potenza: che perciò la maniera di ottenerla consisterà, com'è chiaro, nella moltiplicazione successiva di quel polinomio tante volte per se stesso, meno una, quante ne indicano le unità suddette.

158. Adunque il quadrato di $a + b$ sarà dinotato dal prodotto $(a + b)$ $(a + b)$; ed esso sarà $a^2 + 2ab + b^2$, che paragonato alla sua radice $a + b$, si vedrà composto da questa nel seguente modo, cioè: *da' quadrati di ciascun de' termini a, b di quel binomio, aggiugnendovi il doppio del loro prodotto*. E questo stesso si vedrà generalmente aver luogo pel quadrato di un polinomio qualunque, cioè: *esso costerà de' quadrati delle parti, ossia de' monomii che lo compongono, e di tutti i doppii prodotti de' monomii stessi.*

159. E volendo di quel binomio $a + b$ il cubo, bisognerà moltiplicare

| | |
|---|---|
| *il di lui quadrato* | $a^2 + 2ab + b^2$ |
| *per la radice* | $a + b$ |
| | $a^3 + 2a^2b + ab^2$ |
| | $+ a^2b + 2ab^2 + b^3$ |
| ed esso risulterà | $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |

ove contiensi, come si vede, *il cubo di ciascuna parte del binomio dato, ed il triplo del prodotto del quadrato di ciascuna parte nell' altra*.

E similmente si vedrebbe doversi contenere i cubi de' mo-

nomii di tal fattore, ed i tripli de' prodotti del quadrato di ciascuna parte in ognuna delle altre, nel cubo di un polinomio qualunque.

160. Continuando, come poc' anzi a moltiplicare quel cubo per $a + b$, si avrebbe di $a + b$ la quarta potenza, la quale moltiplicata di nuovo per $a + b$ darebbe di tal binomio la quinta potenza, e lo stesso in seguito, come pure per ogni altro polinomio. Sicchè per tale argomento è superfluo che quì c' intrattenessimo di vantaggio; che perciò passeremo all' operazione inversa di esso, cioè all' estrazione delle radici da' polinomii; al che premetteremo come fondamento di essa i seguenti due teoremi.

### Teorema I.

161. *Nella potenza n di un polinomio debbevisi necessariamente contenere la potenza n di ciascun termine di esso, e l' altra n — 1 presa n volte, e moltiplicata per ciascun degli altri termini.*

Cioè che in $(a + b + c + d + \ldots)^n$ vi debba necessariamente essere

$$a^n, \; b^n, \; c^n, \; d^n, \; \ldots.$$

ed

$$\begin{aligned} &na^{n-1}\,(b + c + d + \ldots) \\ &nb^{n-1}\,(a + c + d + \ldots) \\ &nc^{n-1}\,(a + b + d + \ldots) \\ &nd^{n-1}\,(a + b + c + \ldots) \end{aligned}$$

Imperocchè supponiamo per poco, che nella potenza $n - 1$ di quel polinomio abbia luogo per rispetto al termine $a$ l' espresione

$$a^{n-1} + (n - 1)\, a^{n-2}\, (b + c + \ldots)$$

egli è chiaro, che per passare da questa potenza $n - 1$ alla succesiva potenza $n$, si debba moltiplicarla pel polinomio $a + b + c + d + \ldots$ Or in tal moltiplicazione si vede che prendendo il primo prodotto parziale dell' espressione

poc' anzi supposta, per $a$ primo termine del polinomio, si abbia

$$a^n + (n-1)\,a^{n-1}(b+c+d+\ldots)$$

E continuando la moltiplicazione, dovrà prendersi il prodotto di $a^{n-1}$ primo termine di quell' espressione per $b+c+d+\ldots$, il quale è

$$a^{n-1}(b+c+d\ldots)$$

Laonde nella potenza $n$ del proposto polinomio vi si dovrà contenere la somma de' poc' anzi detti due prodotti, cioè la quantità

$$a^n + na^{n-1}(b+c+d+\ldots)$$

E lo stesso si potrebbe dimostrare relativamente a' termini $b$, $c$, $d$, .... Or si è veduto di sopra ne' §§.158 e 159, che nel quadrato, e nel cubo di un polinomio aveva luogo quell' espressione supposta nel principio della presente dimostrazione. Adunque essa dovrà anche aver luogo generalmente, come si è quì sopra enunciato.

### TEOREMA II.

162. *Nella potenza n di un polinomio vi si debbono comprendere le potenze n de' binomii, trinomii, ec., cioè de' due termini, de' tre, ec. di quel polinomio, ognuna di queste però considerandola isolatamente, e non tutte insieme.*

Suppongasi di fatti che in $(a+b+c+d+\ldots)^{n-1}$ vi sia $(a+b)^{n-1}$, allora per ottenere la potenza $n$ di quel polinomio, bisognerà moltiplicare la precedente potenza $n-1$ di esso per $a+b+c+d+\ldots$, cioè per $(a+b)+c+d+\ldots$. Or nel moltiplicare $(a+b)^{n-1}$ per $a+b$ risulta $(a+b)^n$. Adunque vi è in $(a+b+c+d+\ldots)^n$ la quantità $(a+b)^n$.

E similmente si dimostrerebbe, che supponendo esservi in $(a+b+c+d+\ldots)^{n-1}$ la quantità $(a+b+c)^{n-1}$, debba pure essere in $(a+b+c+d+\ldots)^n$ l' altra $(a+b+c)^n$. E così in appresso.

## CAPITOLO X.

### Delle combinazioni, e permutazioni.

171. Def. i Se un numero $n$ di cose, che diremo *elementi*, si prendano a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, *ec.* in tutt' i modi possibili; tali unioni le diremo *accoppiamenti*, *binari*, se a due a due, *ternari* se a tre a tre, *quadernari* se a quattro a quattro, *ec.*

Indicando gli elementi proposti per le lettere $a, b, c, d...$ gli *accoppiamenti binari* sarebbero come $a,b$; $a,c$; $a,d$ ... i *ternari* come $a,b,c$; $a,c,d$... i *quadernari* come $a,b,c,d$...[1]

172. Siccome in tali accoppiamenti non è stabilito quale degli elementi debba scriversi per primo nell' unirsi agli altri, così vedesi che gli accoppiamenti binari $a,b$; $a,c$; $a,d$ ... possano venire anche notati per $b,a$; $c,a$; $d,a$ ... ; e gli altri ternari $a,b,c$; $a,c,d$ ... il possano esser dinotati egualmente da $b, a, c$; $c, a, b$... ne' quali contengonsi con diverso ordine gli stessi elementi.

173. Def. ii. Gli accoppiamenti *binari*, *ternari*, *quadernari*, *ec.*, presi ognuno una sola volta, diconsi *combinazioni*; e quelli corrispondenti composti dagli stessi elementi semplicemente cambiati nell' ordine diconsi *permutazioni*.

Così stabilita $a,b$ per una combinazione binaria, ne sarà $b,a$, la corrispondente permutazione. E presa $b,a,c$ per una combinazione ternaria, ne sarebbero corrispondenti permutazioni le $b,a,c$; $c,a,b$; $a,c,b$; $b,c,a$; $c,b,a$.

174. È evidente che di un numero di elementi qualunque

[1] L'ordinaria maniera di esprimere le combinazioni coll' accozzamento delle lettere che ne esprimono gli elementi riescendo impropria, dopo ciò che si è stabilito nel §.17, abbiamo però adottato l' espediente di esprimerle ponendovi tra gli elementi accozzati la virgola.

siesi non possa aversene che una sola combinazione ; tal che $a,b$, se sieno due $a$ e $b$ ; $a,b,c$,essendo tre $a;b;c$ : $a,b,c,d$ : se quattro $a$; $b$; $c$; $d$.

175. Ma poichè l'era arbitrario lo scrivere nella *combinazione* binaria $a,b$ in primo luogo l' uno o l' altro elemento , si vede bene che debbavi essere la *permutazione* $b,a$ . Adunque *ogni combinazione binaria ne trae seco necessariamente una permutazione.*

Ottenendosi le combinazioni ternarie di tre elementi $a;b;c$ dall' aggiugnere agli accoppiamenti binari $a,b$ ; $b,a$ il terzo elemento $c$ ; e questo potendo in ciascuno di quelli scriversi o prima dell' elemento $a$ , o tra questo e l' elemento $b$ , o ancora dopo di $b$, cioè ne'seguenti modi $c,a,b$ ; $a,c,b$ ; $a,b,c$ , e lo stesso per la permutazione $b,a$ ; si vede quindi che *gli accoppiamenti di tre lettere debbano risultar sei di numero , cioè quanto 2.3 ; che però con una sola combinazione abbian luogo cinque permutazioni.*

Similmente procedendo coll' accoppiar un quarto elemente $d$ a' tre precedenti, si vede bene che possa questo in ognuno di essi come $a,b,c$ scriversi in quattro luoghi differenti , come $d,a,b,c$ ; $a,d,b,c$ ; $a,b,d,c$ ; $a,b,c,d$; sicchè essendo sei que'precedenti accoppiamenti questi abbiano a risultar quanto 6.4 , cioè 2.3.4 , ne' quali però per una sola combinazione corrispondono 23 permutazioni.

Ed in generale,che per $m$ elementi ne sieno tutti gli accoppiamenti a farsene espressi dal numero 1.2.3.4.... $m$ ; e che essendone una sola la combinazione, le permutazioni risultino dal numero dinotato dal prodotto indicato minorato di 1.

176. Ciò premesso vogliansi le semplici combinazioni binarie di $m$ elementi, o pure le semplici permutazioni. È chiaro che ciascuno di essi al numero $m$ dovendosi combinar con tutti gli altri al numero $m-1$ ; gli accoppiamenti binarii risulteranno al numero $m(m-1)$.Ma siccome ognun di essi accoppiamenti ha la corrispondente permutazione, così tanto il nu-

mero delle combinazioni, che quello delle permutazioni dovrà venir rappresentato da $\frac{m(m-1)}{2}$.

177. Che se di quelli elementi vogliansi le semplici combinazioni ternarie. Ottenuto il numero $m(m-1)(m-2)$ di tutti gli accoppiamenti sì di combinazioni che di permutazioni ternarie, siccome ognuna di quelle è la sesta parte de' corrispondenti accoppiamenti; così il numero di tutte esse risulterà espresso da $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$.

178. Inoltre gli accoppiamenti quadernari di $m$ elementi venendo dinotati da $m(m-1)(m-2)(m-3)$; le sole combinazioni quadernarie saranno espresse dal numero

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}.$$

Ed in generale gli accoppiamenti al grado $n$ di $m$ elementi essendo al numero di

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-n+1)$$

le semplici *combinazioni* a quel grado saranno dinotate da

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-n+1)}{1.2.3.4\ldots.n}$$

E sarà poi facile il riconoscere quante debbano essere le permutazioni corrispondenti per tutt'i suddetti accoppiamenti.

179. Lo stesso ragionamento che si è fatto per separare negli accoppiamenti di $m$ elementi le combinazioni dalle permutazioni si ripete nel caso che tra quegli elementi ve ne sieno degli identici. Imperocchè se questi sien due, ed espressi da $a$; $a$, è evidente che risultando identiche le combinazioni sì con l' una $a$, che con l' altra, ad eliminarne le identiche bisogni dividere la formola corrispondente degli accoppiamenti, o delle combinazioni, o delle permutazioni per 2, che vale lo stesso di supprimere un tal fattore nel prodotto

indicante quegli accoppiamenti, o quelle combinazioni; sicchè quelli risulteranno indicati da

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{2}$$

e queste da

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\,2^{2}.\,3.\,4\ldots\ldots n}$$

Ed essendo tre gli elementi identici $a$; $a$; $a$, è chiaro che si verranno a ripetere tra gli accoppiamenti in generale, o le combinazioni tante volte le identiche, quanti sono gli accoppiamenti di tre elementi, cioè le volte dinotate da 2. 3. E però ad avere i soli accoppiamenti non identici bisognerà dividere la formola esprimente questi per 2. 3; ond' è che essa diverrà

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.\,3}$$

e però quella delle corrispondenti combinazioni sarebbe

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\,2^{2}.\,3^{2}.\,4\ldots\ldots n}$$

Così procedendo si vedrà che supposto esser $p$ il numero degli elementi identici, la formola degli accoppiamenti sarebbe

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{2.\,3.\ldots\ldots.\,p}$$

e quella delle sole combinazioni

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+0)}{1.\,2^{2}.\,3^{2}.\,4^{2}\ldots\ldots p^{2}(p+1)(p+2)\ldots.n}$$

180. Con lo stesso ragionamento si conchiuderebbe, che se oltre gli elementi identici $a$ al numero $p$, ve ne fossero altri identici tra loro al numero $q$, essendo $p+q<n$, la formola esprimente gli accoppiamenti distinti sia

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots.p\times1.\,2.\,3.\,4\ldots.q}$$

la potenza $n$ di questo trinomio finora ottenuto per radice si dovrà poter sottrarre dal polinomio proposto (162.); e darà un residuo, se mai l' operazione non siasi terminata, sul quale si opererà come sul precedente, per ottenere il quarto termine della radice richiesta; e così successivamente.

165. L' operazione generale poc' anzi descritta potrebbe abbreviarsi nel seguente modo. Ottenuto un primo termine della radice, come nel numero precedente, si apparecchi il divisore nel modo stesso che si è detto, e poi per esso dividansi tutti i termini della potenza proposta, che ne sono suscettivi; si avranno per quozienti tutti gli altri termini della radice cercata. Ma tal maniera di operare può riescir fallace in qualche caso: nè poi si potrà da essa ricavare il mezzo di compiere in alcuni casi una potenza del grado $n$ in cui manchi qualche termine, la qual cosa riesce vantaggiosa in taluni rincontri; che perciò, quantunque più lungo, rimane sempre preferibile il primo de' modi sopra esposti.

166. Intanto nel dare una convenevole applicazione dell' suzidetta regola ci limiteremo semplicemente all'estrazione di radice quadrata e cubica, che sono quelle che occorrono frequentemente nell' uso dell' Analisi algebrica.

ESEMPIO I.

167. *Cerchisi la radice quadrata del polinomio*

$$\begin{array}{lcll}
\textit{Quadr.} & & a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 & \textit{Rad.cerc.} \\
\textit{Divis.}2a & & \underline{a^2} & a+b+c \\
 & & 0+2ab & \\
(a+b)^2 & = & \underline{a^2+2ab+b^2} & \\
 & & 0+2ac & \\
(a+b+c)^2 & = & \underline{a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Ed un tal esempio non ha nè men bisogno di spiegazione per essere ben inteso, bastando la maniera com'è esposto, e

quello che per l' operazione in esso eseguita fu generalmente detto nel §.164.

168. L'operazione precedente avrebbe anche potuto abbreviarsi nel seguente modo, cioè: Dopo essersi ottenuto il primo termine $a$ della radice cercata, il quadrato di esso si sottragga dal primo termine $a^2$ del quadrato dato, sicchè essi elidansi. Poi si raddoppii l' $a$, e diviso un termine del quadrato dato, che ne sia suscettivo, come $2ab$, per $2a$, si scriva il quoziente $+ b$ sì nella radice, che accanto a quel divisore $2a$: egli è chiaro, che moltiplicando $2a + b$ per $b$ si venga a compiere il doppio prodotto di $a$ per $b$, e 'l quadrato di $b$, che sono gli altri due termini del quadrato di $a + b$, dopo aver già distrutto il primo di essi $a^2$; che perciò basterà sottrarre questi dal residuo già ottenuto col sottrarre $a^2$ dall' espressione data: si avrà così un nuovo residuo. Similmente si raddoppii la radice $a + b$ finora trovata, e si avrà $2a + 2b$; e diviso un termine di quel nuovo residuo, che ne sia suscettivo, per $2a$, si scriva il quoziente $c$ accanto a' due termini della radice già avuti, ed anche accanto a $2a+2b$. È pure manifesto, che moltiplicando $2a + 2b + c$ per $c$, si verranno ad ottenere i doppii prodotti di $a$ per $c$, di $b$ per $c$, e 'l quadrato di $c$; e questi aggiunti a que' tre altri termini già distrutti formerebbero tutto il quadrato di $a + b + c$; che perciò sottraggasi questo prodotto dal precedente residuo; e se abbiasi un altro residuo, si continui l' operazione stessa che si è fatta pel residuo precedente; si verrà per tal modo ad ottenere la radice cercata; e non essendovene, come nel caso presente, sarà $a + b + c$ una tal radice.

L' operazione nell' esempio seguente trovasi eseguita nella maniera qui indicata.

### Esempio II.

169. *Esaminare se sia un quadrato, o cosa manchi per ridurvelo, l'espressione data*

| | Quadrato $x^4-2ax^3+2a^2x^2-b^2x^2-2a^3x+a^4$ | Radice $x^2-ax+a^2$ |
|---|---|---|
| Divis.$^e$ $2x^2-ax$ | $x^4$ | |
| | $0-2ax^3+a^2x^2$ | |
| $2x^2-2ax+a^2$ | $0+a^2x^2-b^2x^2-2a^3x+a^4$ | |
| aggiungasi . . . . . . | $+a^2x^2+b^2x^2$ | |
| | $2a^2x^2 \quad -2a^3x+a^4$ | |
| | $2a^2x^2 \quad -2a^3x+a^4$ | |
| | $0 \quad 0 \quad 0$ | |

Sicchè la quantità proposta per divenire un quadrato perfetto, la cui radice sia $x^2-ax+a^2$, bisogna aggiugnervi $a^2x^2+b^2x^2$.

### Esempio III.

170. *Vogliasi la radice cubica dell' espressione*

$$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$\frac{a^3}{0}$ Radice $a+b+c$

Div.$^e$ $3a^2$ 1° Res. $3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$

$$(a+b)^3=\frac{a^3}{0}+\frac{3a^2b}{0}+\frac{3ab^2}{0}+\frac{b^3}{0}$$

2° Res. $3a^2c+6abc+3ac^2+3b^2c+3bc^2+c^3$

$$(a+b+c)^3=\frac{a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3}{0}$$

Presa la radice cubica $a$ del termine $a^3$ dell' espressione data, il quale è cubo perfetto, questa è un termine della radice cercata; ed esso elevato a cubo, e sottratto dall' espressione proposta ha dato per residuo $3a^2b+3a^2c+\ldots$ Ciò posto si è apparecchiato il divisore prendendo il triplo del quadrato

cioè

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2^2.3^2.4^2\ldots p^2(p+1)(p+2)\ldots q}$$

supposta la $p<q$.

E quella delle semplici combinazioni sarebbe

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2^4.3^4.4^4\ldots p^4.(p+1)(p+2)\ldots q}$$

181. E supponendo $q=m-p$, sicchè degli elementi proposti ve n' abbia un numero $p$ d' identici tra loro, ed i rimanenti anche tra loro identici, la formola precedente prenderebbe la forma

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2^2.3^2.4^2\ldots p^2.(p+1)(p+2)\ldots(m-p)}$$

e quella delle combinazioni sarebbe

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2^4.3^4.4^4\ldots p^4(p+1)(p+2)\ldots(m-p)}$$

E con lo stesso ragionameuto si potrebbero facilmente assegnare le formole degli accoppiamenti, e delle combinazioni nel caso di tre, o più elementi identici.

182. Per non eccedere in ripetizioni continue sonosi tralasciate le formole corrispondenti per le permutazioni in diversi §§. del presente capitolo, essendo facilissima cosa il vedere quali esse debbano essere, ed il rappresentarle.

# CAPITOLO XI.

## Formola generale dello sviluppo di una potenza qualunque di un binomio.

183. Diverse dimostrazioni sono state date dagli analisti per lo sviluppo della formola $(x+a)^m$, conosciuta volgarmente col nome di *Binomio del Newton*, ove la $m$ rappresenti un numero qualunque. Di queste le generalissime sono fondate sopra principii superiori a quelli cui riguardasi in questa parte dell' Analisi algebrica, e dopo l'esposizione de'quali anche noi non tralasceremo di ritornare su questo argomento medesimo, la cui importanza ci obbliga, per ragion di metodo, a doverne ora trattare. Altre che su principii elementari sono fondate, che perciò al presente trattato si confanno, pel caso più semplice, cioè per quello in cui $m$ sia un numero intero positivo, dal quale poi la dimostrazione degli altri casi trovasi dedotta, sono fondate sull' induzione; ed in talune di queste solamente, dopo di essersi così prodotto il ragionamento fino ad un certo segno, da derivarne con chiarezza la legge onde progrediscono i termini di quello sviluppo, vi si trova poi dimostrata generalmente la continuazione della stessa legge in appresso, cioè per tutti gli altri termini, e per qualunque valore intero e positivo della $m$.

184. A noi pare intanto, che siccome la formazione della potenza del binomio, nel caso dell' esponente $m$ intero e positivo, consiste effettivamente in una continuata moltiplicazione di quel binomio per se stesso, sicchè per tal modo venga a comporsi un prodotto di $m$ fattori espressi dal medesimo binomio, così la legge di questa formazione dalla natura di un prodotto di fattori binomii della forma $x+a$ debba direttamente ripetersi. E tanto più giova che in tal modo que-

sto argomento sia qui trattato, quanto che potremo in appresso valerci di questa stessa ricerca nella composizione de' coefficienti de' termini delle equazioni composte, nel quale argomento anche dell' induzione la maggior parte degli analisti si vale.

### Teorema.

185. *Se un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera $x$ comune a' suoi termini si trovi essere della forma*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + T$$

che indicheremo per M, *ed esso si moltiplichi pel binomio $x + a$; il prodotto dovrà essere un polinomio ordinato per rapporto alla stessa $x$ al grado $m + 1$, ed avere un termine di più del proposto.*

Imperocchè moltiplicando il polinomio M per $x$ primo termine del binomio $x + a$, si ha di nuovo lo stesso polinomio con la $x$ accresciuta di una dimensione in ciascun termine; ed in seguito moltiplicando quel polinomio per $+ a$ si dovrà avere un altro prodotto nel quale la $x$ si troverà al grado stesso che nel polinomio proposto, avendo $+ a$ per fattore in tutt'i suoi termini. Sicchè stabilendo questo nuovo prodotto di rincontro al precedente, incominciando perciò dal secondo termine di questo, si potranno ridurre ad un solo i termini moltiplicati per lo stesso grado della $x$, e risulterà così

$$\begin{aligned} x^{m+1} &+ Ax^m + Bx^{m-1} \quad \ldots\ldots + Tx \\ &+ ax^m + Aax^{m-1} \quad \ldots\ldots + Sax + aT \end{aligned}$$

cioè

$$x^{m+1} + (A + a)\,x^m + (B + Aa)\,x^{m-1} \ldots + (T + Sa)x + aT$$

il qual prodotto, che in appresso dinoteremo per N, si vede aver le condizioni proposte nel presente teorema.

186. Cor. 1. Il prodotto di due binomii della forma $x + a$, $x + b$ dee essere un trinomio, ove la $x$ ascenda a due dimensioni nel primo termine: quello di tre binomii $x + a$, $x + b$, $x + c$ dovrà avere quattro termini, e la $x$

nel primo di questi al terzo grado. E generalmente essendo al numero $m$ i fattori binomii $x + a$, $x + b$, $x + c$, ... il loro prodotto dovrà costare di $m + 1$ termini, nel primo de' quali la $x$ si troverà al grado $m$.

187. Cor. 2. L' ultimo termine $+ aT$ nel polinomio N risulta dal prodotto del secondo termine del binomio $x + a$ per l' ultimo termine $T$ del polinomio M pel quale si è moltiplicato; e così supponendo questo polinomio M nato dal prodotto di un polinomio M', ove la $x$ era al grado $m - 1$, e l' ultimo termine veniva espresso da $T'$, per un fattore binomio $x + \alpha$, si troverebbe essere $T' = \alpha T''$; e similmente retrogradando fino al primo fattore binomio del polinomio M, si troverebbe che l' ultimo termine di un polinomio composto da fattori binomii della forma soprindicata, debba costare del prodotto di tutt' i secondi termini di que' binomii; il che per altro era anche chiaro dalla moltiplicazione.

## Problema.

188. *Se un polinomio sia composto da fattori binomii della forma $x + a$, $x + b$, $x + c$, ...; si vuol determinare la natura de' coefficienti della $x$ per ciascun termine di esso.*

Per facilità maggiore supponiamo nel polinomio N (185) trasformata la $m + 1$ in $n$, sicchè esso divenghi della seguente forma N'

$$x^n + (A+a)x^{n-1} + (B + Aa)x^{n-2} + \dots + (T + Sa)x + Ta$$

È chiaro che l' introduzione del fattore $x + a$ nel polinomio M abbia accresciuto di $+ a$ il coefficiente del secondo termine di quello; e questa legge dovendo sempre verificarsi, cioè aver luogo anche pel polinomio M' derivante da N' ( $x + \alpha$ ), sicchè la $A$ sia uguale ad $A' + \alpha$, e così in appresso, si vedrà che generalmente:

*Il coefficiente del secondo termine del prodotto di più fat-*

## CAPITOLO X.

### Delle combinazioni, e permutazioni.

171. Def. I. Rappresentino $a$, $b$, $c$, $d$. . . . . . . . un numero $n$ di cose, che dirò *elementi*, ed essi prendansi a due a due, a tre a tre, ec. in tutt'i modi che ciò può farsi, escludendo però quelli che con diverso ordine comprendano gli elementi stessi; i risultamenti che si otterranno si dicono *Combinazioni*. E si diranno *Permutazioni* le altre combinazioni degli elementi stessi con ordine diverso da quello delle già formate.

172. Def. II. Se gli elementi si sono presi a due per volta, le combinazioni, o le permutazioni corrispondenti si diranno *binarie*; se a tre per volta si diranno *ternarie*, ec.

173. Così degli elementi $a$, $b$, $c$, $d$ sarebbero combinazioni binarie le seguenti

$[a, b]$ $[a, c]$ $[a, d]$, ... *.

ternarie le altre

$[a, b, c]$ $[a, b, d]$, ...

174. E le permutazioni corrispondenti ad esse sarebbero, per le binarie

$[b, a]$ $[c, a]$ $[d, a]$, ec.

per le ternarie

per la 1. $\begin{cases} [a, c, b] \\ [b, a, c] \\ [\ldots \end{cases}$, per la 2. $\begin{cases} [a, d, b] \\ [b, a, d] \\ [\ldots \end{cases}$

175. Dalla definizione recata nel §. 166 è chiaro primieramente, che se gli elementi dati $a$, $b$, $c$, $d$... fossero al

* L'ordinaria maniera di dinotare le combinazioni coll'accozzamento delle lettere che ne esprimono gli elementi riescendo impropria, dopo ciò che si è stabilito nel §. 17, abbiamo però adottata l'altra forma quassù esposta.

numero $m$, e di essi si volessero le combinazioni al grado stesso $m$, non ve ne sarebbe che una sola.

176. Quindi con due elementi $a$, $b$, non si potrà ottenere che la sola combinazione [ $a$, $b$ ] ed una sola permutazione [ $b$, $a$ ] si potrà ottener da quella combinazione; ond' è che le combinazioni, e permutazioni saranno in numero di 2. Che se gli elementi sieno tre $a$, $b$, $c$; si potrà far da essi una sola combinazione ternaria, che sia [ $a$, $b$, $c$ ]. Ma siccome l'$a$ non si è presa che arbitrariamente per primo termine, e $b$ per secondo, $c$ per terzo; così cominciando a scambiare quel primo termine in $b$, o in $c$, si avranno le due permutazioni [ $b$, $a$, $c$ ], [ $c$, $b$, $a$ ]; e scambiando quel secondo termine $b$ con $c$, e viceversa, in ciascuna delle poc'anzi ottenute tre permutazioni, si otterranno così le altre tre [$a$, $c$, $b$], [$c$, $a$, $b$ ], [$b$, $c$, $a$]. Che perciò essendosi colle precedenti operazioni eseguiti tutt' i cambiamenti d' ordine, di cui eran suscettivi gli elementi di quella prima combinazione [ $a$, $b$, $c$ ], si vede chiaramente, che con tre elementi si abbia una sola combinazione ternaria, e cinque permutazioni di questa; ond' è che il numero delle une e delle altre sarà espresso da 6, cioè da 3.2.

177. Che se gli elementi proposti erano 4 espressi da $a$, $b$, $c$, $d$; da essi non si avrebbe che la sola combinazione quadernaria [ $a$, $b$, $c$, $d$ ]. E con un ragionamento analogo al precedente si vedrà, che scambiando il $b$ con l' $a$, il $c$ con l' $a$, il $d$ con l' $a$, cioè passando ciascun di questi elementi per primo, e quello in luogo loro rispettivamente, si avranno tre permutazioni di quella prima combinazione; ed in queste quattro espressioni potendo scambiarsi il $c$, $d$, col $b$, se ne verranno ad avere 8 altre, che con le quattro precedenti ne verranno a formare 12. Finalmente in queste 12 scambiando il $d$ col $c$, ne nasceranno 12 altre: ond'è che il numero delle combinazioni, e permutazioni di 4 lettere sia 24, e però espresso da 4.3.2.1.

178. In generale per un numero $m$ di elementi, le combinazioni, e permutazioni al grado $m$ dovranno essere espresse da $m(m-1)\ldots(m-(m-1))$. Di fatti, sia ciò vero per un determinato numero $m$; se tal numero si accresca di 1, sicchè divenga $m+1=m'$, la formola poc' anzi recata si cambierà in

$$(m+1)m(m-1)\ \ldots\ ((m+1)-m))$$

cioè in

$$m'(m'-1)(m'-2)\ \ldots\ ((m'-(m'-1))$$

la quale è identica in forma alla proposta; e ciò indica che verificandosi quella per un dato grado di combinazioni, e permutazioni, debba anche aver luogo per l' altra di un grado superiore; ma quella formola si è veduto esser vera fino alle combinazioni, e permutazioni quadernarie di 4 elementi (177). Dunque dovrà pure aver luogo per le *pentenarie* di 5 elementi; e così procedendo oltre.

## Problema I.

179. *Dato il numero m di elementi espressi dalle lettere a, b, c, d, e . . . ; determinare il numero delle combinazioni, e permutazioni binarie delle medesime.*

È manifesto che accoppiando ad $a$ una per volta ciascuna delle altre lettere, che sono al numero $m-1$, si verranno ad avere tutte le combinazioni di $a$ con quelle; le quali combinazioni risulteranno al numero $m-1$. Similmente accoppiando a $b$ tutte le altre lettere anche al numero $m-1$, compresavi l' $a$, si verranno ad avere tutte le combinazioni di $b$ con quelle; e queste risulteranno anche al numero $m-1$. E così continuando in seguito per tutti gli altri elementi $c, d\ldots$ si verranno ad avere $m$ serie di combinazioni, ciascuna al numero $m-1$ di termini, nelle quali, com' è chiaro, vi si comprenderanno anche tutte le permutazioni di quelle combinazioni; ond' è che il numero delle une e delle altre do-

vrà essere dinotato da

$$m(m-1);$$

e quindi quello delle une, o delle altre separatamente verrà espresso da

$$\frac{m(m-1)}{2} \text{ (176.)}.$$

### PROBLEMA II.

180. *Esibire il numero delle combinazioni, e permutazioni ternarie, o quello delle sole combinazioni, che possonsi effettuare con m elementi.*

Suppongansi fatte le combinazioni, e le permutazioni binarie di essi $m$ elementi, che saranno, come si è veduto, al numero $m(m-1)$. Per avere le ternarie, è chiaro che ad ognuna di queste converrà accoppiarvi ciascuno degli elementi dati, dal terzo in poi, cioè da $c$ in poi, il che per ciascuna di quelle combinazioni, e permutazioni binarie ne darebbe $m-2$ ternarie; e quindi l'intero numero delle combinazioni, e permutazioni ternarie verrà espresso da

$$m(m-1)(m-2).$$

Ma per ogni combinazione ternaria si hanno cinque permutazioni, sicchè quella viene ad essere quanto il sesto del numero delle une e delle altre (176.). Laonde il semplice numero delle combinazioni richieste verrà dinotato da

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

181. Continuando il ragionamento in modo simile a quello del precedente problema, si troverà che il numero delle combinazioni, e permutazioni quadernarie di $m$ elementi sia espresso da

$$m(m-1)(m-2)(m-3);$$

e che quello delle sole combinazioni venghi dinotato da

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

Ed in generale che la formola la quale esprime le permutazioni, e combinazioni al grado $n$ di $m$ elementi sia la seguente

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-[n-1])$$

e quella delle sole combinazioni

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-[n-1])}{1.2.3.4\dots\dots\dots n}$$

La qual cosa volendo dimostrarla generalmente si potrà far uso di un ragionamento analogo a quello del §. 178 ; il qual modo di dimostrare è da noi soventi volte adoperato in questi Elementi.

182. E ciò può quì bastare per l' uso che dovremo fare del presente argomento ; intorno al quale chi desidera maggior estensione , ed un esercizio di curiosi problemi , che da questa teorica direttamente dipendono , potrà riscontrare il cap. XI. part. 1. e 2. dell' *Algebra* del Lhuilier.

## CAPITOLO XI.

### Formola generale dello sviluppo di una potenza qualunque di un binomio.

183. Diverse dimostrazioni sono state date dagli analistì per lo sviluppo della formola $(x + a)^m$, conosciuta volgarmente col nome di *Binomio del Newton*, ove la $m$ rappresenti un numero qualunque. Di queste le generalissime riposano sopra principii superiori a quelli che ora trattiamo in questa parte dell'Analisi algebrica, e dopo l'esposizione de'quali anche noi non tralasceremo di ritornare su questo argomento medesimo, la cui importanza ci obbliga, per ragion di metodo, a doverne ora trattare. Altre che su principii elementari sono fondate, che perciò al presente trattato si confanno, pel caso più semplice, cioè per quello in cui $m$ sia un numero intero positivo, dal quale poi la dimostrazione degli altri casi trovasi dedotta, sono fondate sull' induzione; ed in talune di queste solamente, dopo di essersi così prodotto il ragionamento fino ad un certo segno, da derivarne con chiarezza la legge onde progrediscono i termini di quello sviluppo, vi si trova poi dimostrata generalmente la continuazione della stessa legge in appresso, cioè per tutti gli altri termini, e per qualunque valore intero e positivo della $m$.

184. A noi pare intanto, che siccome la formazione della potenza del binomio, in questo primo caso, consiste effettivamente in una continuata moltiplicazione di quel binomio per se stesso, sicchè per tal modo venga a comporsi un prodotto di $m$ fattori espressi dal medesimo binomio, così la legge di questa formazione dalla natura di un prodotto di fattori binomii della forma $x + a$ debba direttamente ripetersi. E tanto più giova che in tal modo questo argomento sia quì

trattato, quanto che potremo in appresso valerci di questa stessa ricerca nella composizione de' coefficienti de' termini delle equazioni composte, nel quale argomento anche dell' induzione la maggior parte degli analisti si vale.

### TEOREMA.

185. *Se un polinomio ordinato per rapporto ad una lettera $x$ comune a' suoi termini si trovi essere della forma*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + T$$

*che indicheremo per* M, *ed esso si moltiplichi pel binomio $x + a$; il prodotto dovrà essere un polinomio ordinato per rapporto alla stessa $x$ al grado $m + 1$, ed avere un termine di più del proposto.*

Imperocchè moltiplicando il polinomio M per $x$ primo termine del binomio $x + a$, si ha di nuovo lo stesso polinomio con la $x$ accresciuta di una dimensione in ciascun termine; ed in seguito moltiplicando quel polinomio per $+ a$ si dovrà avere un altro prodotto nel quale la $x$ si troverà al grado stesso che nel polinomio proposto, avendo $+ a$ per fattore in tutt' i suoi termini. Sicchè stabilendo questo nuovo prodotto di rincontro al precedente, incominciando perciò dal secondo termine di questo, si potranno ridurre ad un solo i termini moltiplicati per lo stesso grado della $x$, e risulterà così

$$\begin{aligned} x^{m+1} + Ax^m + B\,x^{m-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots + Tx \\ + ax^m + Aax^{m-1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots + Sax + aT \end{aligned}$$

cioè

$$x^{m+1} + (A + a)x^m + (B + Aa)x^{m-1} \ldots + (T + Sa)x + aT$$

il qual prodotto, che in appresso dinoteremo per N, si vede aver le condizioni proposte nel presente teorema.

186. Cor. 1. Il prodotto di due binomii della forma $x + a$, $x + b$ dee essere un trinomio, ove la $x$ ascenda a due dimensioni nel primo termine: quello di tre binomii $x + a$, $x + b$, $x + c$ dovrà avere quattro termini, e la $x$

nel primo di questi al terzo grado. E generalmente se sieno al numero $m$ i fattori binomii $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... il loro prodotto dovrà costare di $m+1$ termini, nel primo de' quali la $x$ si troverà al grado $m$.

187. Cor. 2. L' ultimo termine $\dotplus aT$ nel polinomio N risulta dal prodotto del secondo termine del binomio $x+a$ per l' ultimo termine $T$ del polinomio M pel quale si è moltiplicato; e così supponendo questo polinomio M nato dal prodotto di un polinomio M', ove la $x$ era al grado $m-1$, e l' ultimo termine veniva espresso da $T'$, per un fattore binomio $x+\alpha$, si troverebbe essere $T=\alpha T'$; e similmente retrogradando fino al primo fattore binomio del polinomio M, si troverebbe che l'ultimo termine di un polinomio composto da fattori binomii della forma soprindicata, debba costare del prodotto di tutt' i secondi termini di que' binomii; il che per altro era anche chiaro dalla moltiplicazione.

## Problema.

188 *Se un polinomio sia composto da fattori binomii della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$, ...; si vuol determinare la natura de' coefficienti della $x$ per ciascun termine di esso.*

Per facilità maggiore supponiamo nel polinomio N (185.) trasformata la $m+1$ in $n$, sicchè esso divenghi della seguente forma N'

$$x^n+(A+a)x^{n-1}+(B+Aa)x^{n-2}+\dots+(T+Sa)x+Ta$$

È chiaro che l' introduzione del fattore $x+a$ nel polinomio M ha accresciuto di $+a$ il coefficiente del secondo termine di quello; e questa legge dovendo sempre verificarsi, cioè aver luogo anche pel polinomio M derivante da M' $(x+\alpha)$, sicchè la $A$ sia uguale ad $A'+\alpha$, e così in appresso, si vedrà che generalmente:

*Il coefficiente del secondo termine del prodotto di più fat-*

*tori binomii, tal che $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... debba risultar dalla somma de' secondi termini di que' binomii.*

Similmente il coefficiente della $x^{n-2}$, cioè del terzo termine del polinomio N′ è $B+Aa$, ove $A$ coefficiente del secondo termine del polinomio M, che aveva un fattore binomio di meno che N′ rappresenta la somma di tutt' i secondi termini $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... de' fattori binomii di M, al numero di $m$; che perciò è chiaro, che $Aa$ dinoti la somma delle combinazioni del secondo termine del binomio $x+a$ co' secondi termini $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, ... degli altri binomii fattori di M; sicchè per l' introduzione di questo nuovo fattore $x+a$, il terzo termine del polinomio N′, che n' è risultato, si trova accresciuto di tal somma di combinazioni. Ed essendo chiaro, che debba similmente $B$ essere quanto $B'+A'\alpha$, ove $A'$ rappresenta $+\beta+\gamma+\ldots$, ed $\alpha$ il secondo termine del nuovo fattore introdotto in M′ per avere M, si vedrà che in generale:

*Il coefficiente del terzo termine di un polinomio prodotto da' binomii $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... debba esser rappresentato dall' aggregato delle combinazioni binarie di tutt' i secondi termini di que' fattori.*

Ed in generale essendo $Q+Pa$ il coefficiente di un termine qualunque dell' ordine $p$ del prodotto N′, e $Q$ dinotando il coefficiente del luogo stesso nel polinomio precedente M, dovrà esso venir espresso da $Q'+P'\alpha$; e similmente $Q'$ sarebbe espresso da $Q''+P''\beta$. Sicchè il coefficiente del termine proposto dell' ordine $p$ sarebbe espresso da $Q'$ .... $+P'''\gamma+P''\beta+P'\alpha+Pa$, rappresentando $Q'$ il coefficiente del termine dell' ordine stesso di quello che noi consideriamo, ma nel polinomio del grado $p-1$; che perciò verrebbe ad essere l'ultimo termine di questo, e quindi rappresentato dal prodotto di tutt' i secondi termini de' binomii suoi fattori al numero $p-1$ (187.).

Da ciò è facile conchiudere, che:

*Il coefficiente di un termine qualunque $n$ di quel prodotto* N *sia quanto la somma delle combinazioni al grado $n-1$ di tutt' i secondi termini de' fattori binomii di tal prodotto.*

189. Ed è poi anche facile a rilevarsi dalla regola data pe' segni nella moltiplicazione, che se i secondi termini di que' fattori binomii sieno tutti positivi, saranno anche tutti positivi i termini di quel prodotto; e che essendo negativi debbano alternarsi i termini del prodotto, risultando negativo il secondo, positivo il terzo, negativo il quarto, *ec.*

### Teorema.

190. *Se 'l binomio $x+a$ si elevi alla potenza $n$, dinotando $n$ un numero intero positivo, una tal potenza avrà la seguente forma*

$$x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} \dots$$
$$\dots\dots\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+2)}{1.2.3\dots(n-1)}a^{n-1}x + a^n$$

Imperocchè il coefficiente della $x$ nel secondo termine del prodotto di $n$ fattori $x+a$ dee esser composto da $n$ di volte $+a$, e quindi sarà esso $+na$. Il coefficiente della $x$ nel terzo termine dee esser la somma delle combinazioni binarie di $n$ lettere $a$, ed il numero di tali combinazioni essendo $\frac{n(n-1)}{1.2}$ (179.), e 'l valore di una di esse venendo dinotato da $a^2$, ne segue che il valore di tal coefficiente sia per l' appunto $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$. In oltre il coefficiente del quarto termine risultando dalle combinazioni ternarie di $n$ lettere $a$, sarà perciò $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3$ (180.) E 'l coefficiente del termine $n$ risultando dalle combinazioni $n-1$ di $n$ lettere $a$, dovrà esser dinotato da

$$\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-n+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots..\ (n-1)}\ a^{n-1}\ (181.).$$

E combinando questa riduzione de' coefficienti , per tal caso , con ciò che nel precedente teorema (185.) si è dimostrato , si rileverà facilmente la verità dell' assunto.

191. Essendo identiche le due espressioni $(x+a)^n$ ed $(a+x)^n$ , identici dovranno pur essere i loro sviluppi

$$x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}a^{n-1}x$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ n}a^n$$

$$a^n + nxa^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2a^{n-2} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}a$$
$$+ \frac{n(n-1\ldots(n-n+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots n}x^n$$

e solamente scritti con ordine inverso ; ond' è che debba, come apparisce anche per intuizione , il coefficiente dell'ultimo termine pareggiar quello del primo, ed esser quindi 1 ; il coefficiente $n$ del secondo termine pareggiare l' altro $\dfrac{n(n-1)\ \ldots\ (n-n+2)}{1.2.3\ \ldots.\ (n-1)}$ del penultimo termine ; e similmente il coefficiente $\dfrac{n(n-1)}{1.\ 2.}$ del terzo termine dovrà esser uguale a quello dell' antepenultimo termine , e così in appresso. Laonde si vede, che quando siesi giunto ad ottenere la metà de' coefficienti della potenza $n$ del binomio $x+a$ , se la $n$ è impari (186.) , quelli de' rimanenti termini saranno questi stessi scritti con ordine inverso , cioè incominciando dall' ultimo ottenuto , e salendo al primo ; e se la $n$ è pari (186.) , bisogna giugnere fino al termine medio , e pe' termini rimanenti continuare , come si è detto , dal precedente a tal medio in indietro.

192. La semplice ispezione dello sviluppo della potenza $n$ del binomio $x+a$ fa vedere , che in ogni termine il coef-

ficiente ** stabilito nel modo già detto , debba moltiplicare il prodotto de' termini del binomio elevati rispettivamente a tali potenze , che la somma degl' indici di esse faccia $n$ ; di tal che , se quello di $x$ fosse $n - m$, quello di $a$ dovrebbe essere per l' appunto $m$, dinotando $m$ il luogo del termine minorato dell' unità ; talchè se quel termine era il terzo , sarà $m = 2$ ; se il quarto $m = 3$ , *ec.* In guisa che volendo effettuare la potenza $n$ del binomio $x + a$, si potrebbe facilmente ottenerla nel seguente modo.

Si stabilisca il prodotto $x^{n-m}a^m$, ed in esso si vadan sostituendo per $m$ tutt' i numeri interi , incominciando dal zero fino all' $n$ stesso , sicchè si abbia

$$x^n \quad , \quad x^{n-1}a \quad , \quad x^{n-2}a^2 \; . \; . \; . \; x^{n-(n-1)}a^{(n-1)} \quad , \quad a^n$$

ed i coefficienti saranno , come si è veduto , $n$ pel secondo termine , $\frac{n(n-1)}{1.2}$ pel terzo , $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ pel quarto *ec.*

Esempio.

193. *Voglia elevarsi a quinta potenza il binomio*

$$2y^2 + 4z.$$

Il prodotto da stabilirsi è

$$(2y^2)^{5-m} \times (4z)^m$$

e quindi i termini di tal potenza senza coefficienti saranno

| | | |
|---|---|---|
| I° | $(2y^2)^5$ | $m = 0$ |
| II° | $(2y^2)^4 \times 4z$ | $m = 1$ |
| III° | $(2y^2)^3 \times (4z)^2$ | $m = 2$ |
| IV° | $(2y^2)^2 \times (4z)^3$ | $m = 3$ |
| V° | $(2y^2) \times (4z)^4$ | $m = 4$ |
| VI° | $(4z)^5$ | $m = 5$ |

** Qui il coefficiente è preso nel suo senso ristretto per quella espressione della $n$ che moltiplica in ciascun termine le potenze rispettive della $x$ e della $a$ , che sono i fattori de' termini del binomio proposto .

ed i coefficienti del secondo, e terzo termine, e quindi quelli del quinto, e quarto (186.) saranno $\frac{5}{1}, \frac{5.4}{1.2}$, cioè 5 e 10; ond' è che una tal potenza, verrà espressa da

$$(2y^2)^5+5(2y^2)^4\times 4z+10(2y^2)^3\times(4z)^2+10(2y^2)^2\times(4z)^3+5(2y^2)\times(4z)^4+(4z)^5$$

cioè, eseguendo le operazioni indicate, da

$$32y^{10}+320y^8z+1280y^6z^2+2560y^4z^3+2560y^2z^4+1024z^5.$$

194. Poichè (34.) il binomio $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ si potrà anche dar questa forma ad un binomio da elevarsi a potenza, il che ne facilita lo sviluppo, rendendolo indipendente dal primo termine; ed allora non bisognerà far altro, in fine dell' operazione, che moltiplicare lo sviluppo ottenuto da $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ per $x^n$, a fine di ottener quello di $(x+a)^n$: e ciò suole adoperarsi principalmente ne' casi dell' esponente $n$ non intero e positivo, ove riesce assai vantaggioso

## CAPITOLO XII.

### Continuazione dello stesso argomento del precedente capitolo.

195. Passiamo ora a ricercar lo sviluppo del binomio $(x + a)^n$, supposto che sia $n$ un numero qualunque. Seguiremo in questa ricerca il modo tenuto dall'illustre Lhuilier, nella sua opera intitolata *Principiorum Calculi Differentialis et Integralis expositio elementaris*, e ripetuto poi ne' suoi *Elementi di Algebra* al cap. XIII.; poichè non solo ci sembra assai conducente per l' esattezza, e chiarezza de' principii su i quali è fondato; ma è pure connesso con la dimostrazione da noi data del precedente caso di un tale sviluppo [23].

### Lemma I.

196. *Sieno due formole*

$$M \quad x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots + P x^{m-(r-1)} + Q x^{m-r}$$

$$N \quad x^n + A' x^{n-1} + B' x^{n-2} + C' x^{n-3} \ldots + P' x^{n-(r-1)} + Q' x^{n-r}$$

*ordinate per rispetto ad una stessa lettera x*, [24] ( *A* , *B* , *C*...

---

[23] La via tenuta dal Lhuilier in questa ricerca, conviene nel principio che vi si adopra, come egli stesso lo avverte nella nota a piedi della pag.102. vol.II. *Élémens d' Algèbre*, con quella dell' Eulero, per la dimostrazione generale ed elementare della *formola del binomio*, inserita nel vol.19. de' *Novi Commentarii* dell' Accademia di Pietroburgo, anno 1774. Ma la facil riduzione di ciascun coefficiente di un termine a quello del precedente ad esso, che qui appresso si vedrà, è interamente dovuta al matematico di Ginevra; ed è ciò da riputarsi non ultima parte in tale dimostrazione.

[24] Cioè disposte in modo, che ne' termini successivi l' esponente della $x$ vadasi continuamente abbassando di 1.

$Q$ ... , $A'$ , $B'$ , $C'$ .... $Q'$ .... dinotano i coefficienti della $x$; e quelli che sono solamente diversi per l' apice ' che gli affetta , appartengono a' termini dell' ordine medesimo ) *ed esse formole si moltiplichino fra loro ; ciascun termine del prodotto , il cui grado o luogo sia dinotato da $r$ risulterà dalla somma de' prodotti del termine dello stesso grado nell' un fattore per lo primo termine dell' altro fattore, del termine del grado $r-1$ nell' un fattore per lo secondo dell' altro, e così sempre retrogradando , finchè si giunga a moltiplicare il primo termine dell' un fattore pel termine del grado $r$ dell' altro. Ne' quali prodotti parziali l' esponente della $x$ risulterà sempre lo stesso , cioè quanto $m+n-r$.*

Così , per lo termine corrispondente nel prodotto a quelli che sono dinotati ne' fattori rispettivamente da $Qx^{m-r}$ , $Q'x^{n-r}$ verrà esso espresso da

$$Qx^{m-r}.x^r+Px^{m-(r-1)}.A'x^{n-1}...+P'x^{n-(r-1)}.Ax^{m-1}+Q'x^{n-r}.x^m$$

La dimostrazione di ciò è chiara dalla natura della moltiplicazione.

### LEMMA II.

197. *Supposto che i coefficienti $A,B,C$ ..... $A',B',C'$..... delle formole proposte nel lemma precedente sieno composti in $m$ ed $n$ rispettivamente, come quelli della formola del binomio ; i coefficienti del prodotto di esse , saranno similmente composti in $m+n$ ; che lo sono in $m$ , o pure in $n$ quelli dell' ordine stesso nelle formole date.*

I coefficienti delle formole date , essendo rispettivamente i seguenti :

*Per la prima.*

$$1$$
$$m$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$
....

*Per la seconda.*

$$1$$
$$n$$
$$\frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$
....

perciò quello del secondo termine del prodotto di tali formole dovrà risultare espresso da $m+n$ (196.).

Quello del terzo termine di tal prodotto sarà

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+m.n+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{2.mn}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$=\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m.n}{1.2}$$
$$+\frac{m.n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$=\frac{m(m+n-1)}{1.2}+\frac{n(m+n-1)}{1.2}$$
$$=\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}$$

Il coefficiente del quarto termine del prodotto medesimo verrà rappresentato da

$$\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\frac{m.(m-1).n}{1.2}+\frac{n.(n-1).m}{1.2}+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$=\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\frac{3m.(m-1).n}{1.2.3}+\frac{3n.(n-1).m}{1.2.3}+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$=\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\frac{m.(m-1).n}{1.2.3}$$
$$+\frac{2m.(m-1).n}{1.2.3}+\frac{2n.(n-1).m}{1.2.3}$$
$$+\frac{n.(n-1).m}{1.2.3}+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

la quale ultima espressione, che abbiamo ordinata in tre linee, avendo per comun fattore di ciascuna l' $\frac{m+n-2}{3}$ riducesi linea per linea a' termini della seguente

$$=\frac{m+n-2}{3}\times\frac{m.(m-1)}{1.2}+\frac{m+n-2}{3}\times\frac{2m.n}{1.2}+\frac{m+n-2}{3}\times\frac{n.(n-1)}{1.2}$$

$$=\frac{m+n-2}{3}\left(\frac{m.(m-1)}{1.2}+\frac{2m.n}{1.2}+\frac{n.(n-1)}{1.2}\right)$$

ove l' espressione racchiusa nel vincolo si trova esser precisamente quella del termine precedente, e perciò uguale ad $\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}$. Adunque il coefficiente del termine ora considerato, cioè il quarto, diverrà

$$\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}$$

Così pure il coefficiente del quinto termine di quel prodotto sarà espresso da

$$\frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\frac{m.(m-1)(m-2)n}{1.2.3}+\frac{m.(m-1)}{1.2}\times\frac{n.(n-1)}{1.2}$$
$$+\frac{n.(n-1)(n-2)m}{1.2.3}+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}$$

cioè da

$$\frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\frac{4n.m.(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}+\frac{2.3.m.(m-1).n.(n-1)}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{4m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}$$

E quindi da

$$\frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\frac{n.m.(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{3n.m.(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}+\frac{3m.(m-1).n.(n-1)}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{3m.(m-1).n.(n-1)}{1.2.3.4}+\frac{3m.n.(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{m.n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}$$

che, cavandone il fattore comune $\frac{m+n-3}{4}$ da ogni binomio costituente ciascuna linea, si riduce ad

$$\frac{m+n-3}{4}\left(\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\frac{3n.m(m-1)}{1.2.3}+\frac{3m.n.(n-1)}{1.2.3}+\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)$$

Nel qual risultamento ritrovandosi la quantità compresa nel vincolo identica al coefficiente del termine precedente; perciò il coefficiente del termine presente verrà espresso da

$$\frac{m.(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}{1.2.3.4}$$

E così potrebbe prolungarsi una tal dimostrazione; ma senza ciò fare, è facile vedere che la legge la quale finora si è conosciuto aver luogo, debba continuare pe'coefficienti de' termini seguenti, subito che si riflette, che i fattori ond' essi nascono procedono sempre con la medesima legge, e similmente le operazioni che si debbono fare per eseguir le riduzioni in quel prodotto.

198. Da' due precedenti lemmi è facile rilevare, che il prodotto degli sviluppi de' binomii $(x+a)^m$, $(x+a)^n$, $(x+a)^p$, *ec.* sia una formola binomiale analoga allo sviluppo dell' un de' fattori, ove in luogo dell' esponente di questo vi stia $m+n+p+ec.$ La qual cosa per altro rendevasi anche chiara dal §. 28, essendo $(x+a)^m (x+a)^n (x+a)^p \ldots = (x+a)^{m+n+p+\ldots}$ Quindi:

199. Cor. 1. *Il quadrato, il cubo ... la potenza* $n$-*esima di una formola binomiale si otterrà sostituendo da per ogni dove entra il suo esponente, il doppio di questo, il triplo, o* $n$-volte *il medesimo.*

200. Cor. 2. Al contrario:

*La radice p di una formola binomiale ( ove p dinoti un numero intero positivo ) si otterrà sostituendo da per tutto in quella formola l' esponente della medesima diviso per p.*

Poichè al contrario con sostituire in questa nuova formo-

la binomiale, il moltiplice $p$ dell' esponente di essa, si ritorna alla proposta.

### Teorema I.

201. *Se $m$ ed $n$ sieno numeri interi positivi, dovrà essere*

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a x^{\frac{m}{n}-1} + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)a^2 x^{\frac{m}{n}-2}}{1.2} \dots$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right) \dots \left(\frac{m}{n}-(r-1)\right)a^r x^{\frac{m}{n}-r}}{1.2.3 \dots\dots r}$$

Ciò è manifesto dal già detto nel cor. 2. del lemma II. E si vede pure, che questa serie, quando $n$ non fosse un divisore di $m$, debba continuarsi all' infinito.

### Teorema II.

202. *I binomii $(x+a)^{-m}$, ed $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$ si svolgono ancor essi in espressioni come quelle de' §§. 190 e 201 rispettivamente, ove però invece di $m$, $\frac{m}{n}$ si ponga $-m$, $-\frac{m}{n}$.*

Di fatti se lo sviluppo di $(x+a)^p$ si dividesse per l' altro di $(x+a)^q$, il quoziente dovendo pareggiare $(x+a)^{p-q}$ sarà un' espressione della forma del §. 190, ove siavi $p-q$ sostituito alla $m$; e quindi se $q = p + m$, sarà $p - p - m$, cioè $-m$ la quantità da sostituirsi nella formola quoziente. Laonde *ec.*

E la stessa dimostrazione ha luogo anche per l' altro caso del presente teorema.

### *Aliter.*

203. Il binomio $(x+a)^m$ moltiplicato per l'altro $(x+a)^{-m}$ dà $(x+a)^0 = 1$; onde tale dee anch' essere il prodotto del-

le rispettive formole in cui que' due binomii sviluppansi. Or la prima di queste è

$$x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} \dots$$

e supponendo che la forma dell' altro sviluppo sia

$$x^{-m} - max^{-m-1} - \frac{m(-m-1)}{1.2}a^2x^{-m-2} - \frac{m(-m-1)(-m-2)}{1.2.3}a^3x^{-m-3} \dots$$

si vede che nel prodotto di esse, dal secondo termine in poi, vi sia per fattore del coefficiente il binomio $m - m = o$; ond' è che tali termini svanendo tutti, il prodotto cercato risulti rappresentato solamente da $x^{m-m} = x^0 = 1$. Adunque tal dee essere quale si è supposto lo sviluppo della formola binomiale $(x + a)^{-m}$.

E lo stesso vale anche per lo sviluppo dell' altra $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$.

## CAPITOLO XIII.

### Avvertenze necessarie per convenientemente sviluppare la potenza di un binomio.

204. Allorchè si sviluppa in serie il binomio $(x+a)^m$, ove $m$ dinoti un numero intero positivo, è chiaro che giunti al termine $m+2$ vi si debba nel coefficiente di questo, e così pur ne' seguenti contener sempre il fattore $m-m$ cioè *zero*, da che venendo essi a svanire ne segue che la serie dopo quel numero di termini si arresti. Al contrario, siccome quel fattore *zero* non mai dee aver luogo ove la $m$ si supponga essere un numero negativo, o frazionario, così avviene che in questi casi la *serie* [25] esprimente quello sviluppo debba procedere all' infinito. Ed è perciò che in essi è della massima importanza, che i termini dello sviluppo vadano sempre decrescendo, cioè, come sogliono esprimersi gli analisti, che la serie sia la più convergente possibile, affinchè dalla somma di un numero di que' termini possa ottenersi, con quella approssimazione che si vuole, il valore dello sviluppo medesimo.

205. Per riescire in ciò, pongasi la formola binomiale

$$x^m+m.ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}\dots$$

sotto l' altra forma

$$x^m\left(1+m.\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.\frac{a^3}{x^3}\dots\right)$$

ch' è precisamente lo sviluppo di $x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$ formola ridotta dall' altra $(x+a)^m$; si vedrà chiaramente che sem-

[25] Si denomina dagli analisti *serie* una seguela di termini procedenti con una determinata legge.

pre che $\frac{a}{x}$ sia un fratto vero, i termini compresi nel vincolo dovranno, da un certo luogo in poi, andar necessariamente decrescendo, e con tanta maggiore rapidità, per quanto più sarà piccola l' $a$ in paragone della $x$; che perciò qualunque sia l' esponente $m$, cioè un intero positivo, o negativo, o pure un fratto positivo, o negativo, per ottenere una serie la più convergente possibile dello sviluppo di $A^m$, bisogna che il numero $A$ sia diviso in tal binomio $x+a$, che la $x$ serbi alla $a$ il maggior rapporto possibile.

206. Or nel caso della $m$ negativa, la formola ridotta del §. precedente, prenderà la seguente forma

$$\frac{1}{x^m}\left(1-m\frac{a}{x}+\frac{m(m+1)}{1.2}.\frac{a^2}{x^2}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.\frac{a^3}{x^3}\ldots\right)$$

per la quale, affinchè sia ben condizionata per l' uso che dee farsene nello sviluppare una potenza negativa, basta l'aver adempito a quello che si è indicato nel §. precedente.

207. Che se poi quell' esponente $m$ sia un fratto della forma $\pm\frac{n}{r}$, gli sviluppi corrispondenti a' binomii

$$\sqrt[r]{x^n}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{n}{r}},\ \text{ed}\ \frac{1}{\sqrt[r]{x^n}}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{-\frac{n}{r}}$$

saranno rispettivamente rappresentati da

$$\sqrt[r]{x^n}\left(1+\frac{n}{r}.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2.r^2}.\frac{a^2}{x^2}+\frac{n(n-r)(n-2r)}{1.2.3.r^3}.\frac{a^3}{x^3}\ldots\right)$$

ed

$$\frac{1}{\sqrt[r]{x^n}}\left(1-\frac{n}{r}.\frac{a}{x}+\frac{n(n+r)}{1.2.r^2}.\frac{a^2}{x^2}-\frac{n(n+r)(n+2r)}{1.2.3.r^3}.\frac{a^3}{x^3}\ldots\right)$$

ove si vede che oltre la condizione necessaria a rendere convergente la serie compresa nel vincolo, si richiede, perchè possa farsi uso di tale sviluppo, che il coefficiente del vincolo sia quantità razionale, cioè che si possa da $x^n$ estrarre la radice $r$: vale a dire che il primo termine del binomio

$x+a$, debba esser preso in modo che il fratto $\frac{x}{a}$ sia il più piccolo possibile, ma con la condizione che $x^n$ sia potenza esatta del grado $r$.

I seguenti esempii rischiareranno ciò che si è finora generalmente indicato.

*Per un esponente negativo.*

Esempio I.

208. *Si voglia svolgere in serie, per mezzo della formola del binomio, il fratto* $\frac{1}{2}$.

Se un tal fratto pongasi sotto la forma $\frac{1}{1+1}=(1+1)^{-1}$ si avrà col paragonar questo binomio all' altro $(x+a)^{-m}$, $x=1$, $a=1$, $m=1$; e quindi lo sviluppo del §. 206 presenterà il seguente paradosso algebrico.

$$1-1+1-1+1-1\ldots.$$

Che se pongasi $2=3-1$, si avrà $\frac{1}{2}=\frac{1}{3-1}=(3-1)^{-1}$, d'onde si ha lo sviluppo già alquanto convergente

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)$$

In oltre se riflettasi che $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{2}{3+1}=\frac{2}{5-1}=2(5-1)^{-1}$, si otterrà, per tale apparecchio, lo sviluppo più convergente del precedente, cioè,

$$\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots\right)$$

E così procedendo innanzi si potrebbero ottenere pel fratto $\frac{1}{2}$ sviluppi sempre più convergenti.

### Esempio II.

209. *Sia proposto a svolgere in serie il fratto* $\frac{1}{3^{1000000}}$.

Pongasi $3 = 4 - 1$, sicchè il fratto proposto prenda la forma $\frac{1}{(4-1)^{1000000}} = (4-1)^{-1000000}$. Eseguendo lo sviluppo col porre, nella formola del §.206, $x = 4$, $a = -1$, $m = -1000000$, essa prenderà la seguente forma

$$\frac{1}{4^{1000000}}\left(1 + 1000000 \times \frac{1}{4} + \frac{1000000 \times 1000001}{1.2} \times \frac{1}{16} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots + \frac{1000000 \times 1000001 \times 1000002}{1.2.3} \times \frac{1}{64} \ldots\ldots \right)$$

210. Considerando gli sviluppi precedentemente ottenuti di un fratto, per mezzo della formola del binomio, e facile accorgersi che essi ne' casi particolari non possono essere di alcuna utilità nell' Analisi algebrica. Imperocchè si vede che una tale operazione obbligherebbe ad elevare alla stessa potenza $n$ un numero di un' unità maggiore di $a$, quando lo scindimento di questo si abbia voluto condizionare nella maniera più vantaggiosa; sicchè sarà assai più conducente il rappresentare il fratto $\frac{1}{a^n}$ elevando da principio il numero $a$ alla potenza cercata $n$. Non così però ne' casi dell' esponente frazionario, che ora particolarmente considereremo, ne' quali la formola del binomio conduce ad ottener le radici de' numeri con una conveniente e rapida approsimazione; e serve anche vantaggiosamente in molti casi nell' *Analisi sublime*.

*Per un esponente frazionario.*

### Esempio I.

211. *Si voglia estrarre la radice quadrata da 2, cioè svolgere in serie* $\sqrt{2}$.

Se pongasi $2 = 1 + 1$ ; per mezzo della prima formola esposta nel §. 207 , ove $n = 1$ , $r = 2$ , si otterrà

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{258} - \frac{21}{1024} + \dots$$

Che se pongasi $2 = 4 - 2$ si otterrà la seguente serie un poco più convergente.

$$\sqrt{2} = 2\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{256} \cdot \dots\right)$$

E continuando a decomporre il 2 nelle due parti $\frac{49}{25}$ e $\frac{1}{25}$,[*] si otterrebbe la serie assai più convergente

$$\sqrt{2} = \frac{1}{7}\left(1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{2744} + \dots\right)$$

E si otterrebbe una serie anche più convergente della precedente, se pongasi $2 = \frac{289}{144} - \frac{1}{144}$ . E lo stesso per altri casi .

### Esempio II.

212. *Debbasi ora esibire lo sviluppo in serie del fratto* $\frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$.

Si scinda il 2 in uno de'binomii già indicati nel precedente esempio , e poi si esegua lo sviluppo come in esso sta detto , variando solamente col porre la $m = -\frac{1}{2}$ .

---

[*] Cioè moltiplicando il 2 pel numero quadrato 25 , e poi operando l' indicato scindimento.

213. Oltre al metodo esposto di sopra, per estrarre per approssimazione le radici dalle formole binomie della forma $x^n \pm a$, ove $n$ sia il grado della radice, l' Halley un altro ne espose nel vol. delle *Transazioni Filosofiche* del 1694, che per la facilità, e celerità con cui conduce ad una grande approssimazione delle radici richieste non merita di esser trascurato, come lo è in quasi tutte le istituzioni di Algebra, non trovandolo riportato che negli Elementi del *de la Caille* pubblicati dal *Marie*, ed appena accennato nelle note agli Elementi di Algebra di *Eulero*.

Un tal metodo che riduce immantinente la proposta estrazione di radice del grado $n$ a quella di una radice quadrata, verrà esposto nel seguente libro.

## CAPITOLO XIV.

### Conseguenze che derivansi dal cap. XII.

214. Se i due binomii $(x+a)^n$, $(x-a)^n$ si sviluppino nelle loro corrispondenti serie, è chiaro che queste dovranno essere identiche nel valore de' termini, e solamente aver di contrario segno quelli che contengono le potenze impari della $a$, cioè il secondo, il quarto, ed in generale tutt' i termini de' luoghi pari; che perciò se que' due sviluppi si sommino l' un l' altro, dovranno distruggersi questi termini; e solamente trovarsi in quella somma i doppii de' termini impari, vale a dire, che tal somma sarà quanto il doppio di uno di quelli sviluppi, ove siensi suppressi tutt' i termini de' luoghi impari, e quindi espressa da

$$2x^n\left(1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{a^4}{x^4}+\ldots\right)$$

215. Che se al contrario si fosse l' uno sviluppo binomiale sottratto dall' altro, per esempio il secondo dal primo, si vede facilmente che sarebbero dispersi i termini de' luoghi impari, restando solamente in tal somma il doppio di ciascun termine di luogo pari, cioè si sarebbe ottenuto un risultamento della seguente forma

$$2x^n\left(n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{a^3}{x^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{a^5}{x^5}+\ldots\right)$$

216. Quindi se l' $a$ fosse una quantità immaginaria, tal che $b\sqrt{-1}$, si vede che quella prima espressione dinotante la somma delle due formole binomiali proposte risulterebbe reale, e della forma

$$2x^n\left(1-\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{b^2}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{x^4}-\ldots\right)$$

ed al contrario l' espressione della loro differenza sarebbe immaginaria, e della forma seguente

$$2x^n \sqrt{-1}\left(n\cdot\frac{b}{x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{x^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{b^5}{x^5}+\ldots\right)$$

217. S' intende poi per intnizione, che in questo caso ciascuna delle formole in cui si sviluppa il binomio$(x\pm b\sqrt{-1})^n$, qualunque sia l' esponente $n$, debba essere un' espressione della forma $A\pm B\sqrt{-1}$, ove $A$ dinoti tutt' i termini impari di quello sviluppo, che sono quantità reali, e $B$ tutt' i termini de' luoghi pari che sono immaginarii, e ne' quali si è cavato per fattore comune il $\sqrt{-1}$. E ciò potrà aversi come una convenevol continnazione di quanto fu detto nel §. 151.

218. Chinderemo l' argomento dello sviluppo di un binomio in serie, indicando la maniera di adoperare la stessa formola nell' esprimere la potenza $n$ di un trinomio, quadrinomio, ed in generale di un polinomio qualunque. Sia di fatti $x+a+b+c\ldots$ un polinomio da elevarsi alla potenza qualunque $n$: si ponga $a+b+c+\ldots=y$, prenderà quel polinomio, per tal sostituzione, la forma di un binomio tal che $x+y$; ed esegnitosi lo sviluppo della potenza $n$ di tal binomio, non resterà poi a far altro, che sostitnire ad $y, y^2, y^3 \ldots\ldots\ldots y^n$ le loro equivalenti espressioni $a+b+c+\ldots, (a+b+c+\ldots)^2, (a+b+c+\ldots)^3 \ldots\ldots (a+b+c+\ldots)^n$; le quali si otterranno similmente per mezzo della formola del binomio, adoperando lo stesso ripiego di poc'anzi; e ciò finchè si pervenga a potenza di binomii. Ma di queste potenze indeterminate di polinomii altrove si avrà occasione di esprimerne la forma generalmente.

*Fine del libro primo.*

# LIBRO SECONDO

## DELLE EQUAZIONI DI I°, E II° GRADO ,

## E

## DI ALTRE RICERCHE CHE NE DIPENDONO.

## CAPITOLO I.

### NOZIONI PRELIMINARI INTORNO ALLE EQUAZIONI ED A' PROBLEMI.

219. Def. i. Ogni ricerca intorno a quantità si dice *Problema* .

220.Def.ii.Il soggetto che si ricerca denominasi *Quesito*; le cose onde tal quesito si dee far derivare si chiamano *Dati*; ed i mezzi di connessione tra i dati e 'l quesito , cioè la loro relazione , o relazioni vicendevoli si chiamano *Condizioni* del problema .

221.Le cose suddette sono essenziali alla natura del problema , anche qualora ne fosse impossibile la soluzione.

222. L' arte di chi risolve un problema algebricamente consiste , in saperne convenevolmente contrassegnare i dati e 'l quesito con simboli ; impiegando , come fu detto nel §. 15 , le prime lettere dell' Alfabeto pe' dati , che diconsi anche *quantità note* , e le ultime $x$, $y$, $z$, ed anche $t$, $u$, $v$, pel qnesito , o per quelle altre qnantità da cui si può esso immediatamente derivare , le quali chiamansi perciò *incognite* : indi bisogna , che da que' dati si discenda al quesito per mezzo delle condizioni , esprimendo queste in linguaggio algebrico ; il che fatto , si potrà sempre quel rapporto, qualunque siasi , che costituisce una condizione del problema , ridurre ad uguaglianza , che dicesi *Equazione*.

223. Def. iii. *Equazione* è dunque ogni condizione di un

problema espressa in linguaggio algebrico, e ridotta a pareggiamento tra le note, e le incognite del medesimo.

224. Finalmente conviene maneggiar questa equazione in modo, che l'incognita resti da quelle grandezze che sono note espressa e determinata, il che dicesi *Risolvere l'equazione*.

225. Ed ecco alcuni esempii atti a rischiarare ciò che si è detto.

### Problema I.

226. *Dividere un numero dato in due parti, delle quali l'una contenga l'altra 100 volte.*

Si vede chiaramente, che quì il *dato* sia il numero da dividere, il *quesito* una delle due parti in cui esso vuol dividersi, e la *condizione*, che una di queste sia 100 volte l'altra. Ciò premesso, eccone la

### *Soluzione.*

Si esprima per $a$ il numero dato, e per $x$ la parte minore, sarà l'altra parte quanto $a - x$. Ma per la condizione del problema si esige, che questa parte sia 100 volte la prima; che perciò vi sarà pareggiamento tra $a - x$ e 'l centuplo di $x$, cioè si avrà la seguente equazione al problema

$$a - x = 100\,x.$$

### Problema II.

227. *Trovar due numeri, de' quali sia dato l'eccesso dell'uno sull'altro, e 'l loro prodotto.*

### *Soluzione.*

Si esprima per $a$ l'eccesso dato dell'un numero sull'altro, e per $b$' il prodotto anche dato di essi; è chiaro, che se il numero minore si dinoti con $x$, il maggiore dovrà espri-

mersi con $a + x$: ma tali nnmeri moltiplicati insieme debbono produrre $b^2$; adunqne vi sarà pareggiamento tra $(x + a)x$ e $b^2$; il che darà la seguente equazione al problema

$$x^2 + ax = b^2.$$

## Problema III.

228. *Ritrovar due numeri, de' quali sia data la differenza, e 'l prodotto della loro somma per ciascun di essi.*

### *Soluzione.*

La differenza data si dica $a$, e quel dato prodotto si chiami $b^3$, si esprima poi con $x$ il minore de' numeri cercati; l' altro verrà dinotato da $x + a$: e per la condizione del problema dovendo essere $b^3$ il prodotto delle tre quantità $x$, $x + a$, ed $x + x + a$, si avrà l' equazione

$$2x^3 + 3ax^2 + a^2x = b^3.$$

229. I precedenti tre problemi potranno bastare per ora di rischiaramento a quello che si è detto di sopra.

230. Or riflettendo sulle eqnazioni che da essi sono risultate si osserverà subito tra le medesime la differenza, che in quella del problema I. l' incognita $x$, in tutt' i termini ove si ritrova, ha l' esponente 1, mentre nel secondo ritrovasi in un termine con l' esponente 2, e nel terzo problema anche con l' esponente 3; e potrebbe in altri casi aver pure il 4, il 5, ed in generale un qualunque esponente $n$ intero positivo. Or ciò oostituisce, come vedremo in appresso, una grandissima differenza tra le equazioni pel loro maneggiamento, e tra i problemi onde derivano.

231. Def. iv. Ogni equazione ove l' esponente dell' incognita non ecceda l' 1 si dice di *primo grado*. E si dirà di *secondo*, di *terzo grado*, ed in generale del *grado n* un' equazione, se in essa vi sia qualche termine che abbia per esponente il 2, il 3. . . . . l' $n$.

232. Def. v. Le equazioni di primo grado si dicono anche *semplici*, e si chiamano *composte* quelle di *secondo*, *terzo* ... *n-esimo* grado. E la ragione di ciò si vedrà in appresso.

233. Def. vi. Per ogni equazione, l'espressione algebrica che precede il segno di uguaglianza si dice *primo membro* dell'equazione; e si chiama *secondo membro* l'altra espressione che segue tal segno.

234. Def. vii. Un'equazione si dice *ordinata*, se tutt' i termini di essa, che contengono l'incognita si trovino nel primo membro, ed i termini noti nel secondo; e di più, essendo composta, se que' termini del primo membro si trovino collocati secondo l'ordine degli esponenti dell'incognita, incominciando dal massimo.

Cotesto ordinamento è fondato sul seguente

### Teorema.

235. *Ogni termine di un' equazione può ad arbitrio cancellarsi in un membro, e scriversi nell' altro col segno cambiato, senza che si turbi il pareggiamento.*

Imperocchè col cancellarsi in un membro un termine, vi si è venuto ad aggiungere esso stesso col segno contrario; che perciò affinchè non si turbi il pareggiamento, bisogna che l'aggiunzione della stessa quantità si faccia anche nell' altro membro, ove verrà quindi a comparir quello col segno cambiato.

236. Che perciò l'equazione ordinata dalla proposta

$$x^3 + bx + c = ax^2 + m$$

sarebbe $\quad x^3 - ax^2 + bx = m - c.$

337. Per mezzo del teorema poc' anzi dimostrato si vede chiaramente, che può anche tutt' intero un membro di un' equazione distruggersi, facendosi ricomparire nell' altro co' segni cambiati ne' suoi termini; ed in tal caso l'equazione si dirà *ridotta a zero*.

Così, nel presente caso, la ridotta a *zero* dell' equazione proposta sarebbe

$$x^3 - ax^2 + bx + c - m = o.$$

238. Bisogna però avvertire, e ciò per evitare un errore ordinario, che quel 0 (*zero*), che rappresenta il secondo membro, non dinota già che il primo membro sia assolutamente il puro *niente*, nel qual caso sarebbe vana ogni ricerca su di esso, e nullo il maneggiamento per la risoluzione delle equazioni composte, il quale si esegue d' ordinario dopo una tal riduzione a zero; ma esso è un simbolo il quale dinota che effettivamente si distruggerebbero tra loro i termini del primo membro, ne'casi che per l'incognita $x$ si sostituissero que' valori, che sono il quesito del problema d' onde è derivata quell' equazione.

139. Con poca riflessione che siasi fatta su i precedenti tre problemi, ognuno si sarà accorto, che nel primo di essi si cercava un solo numero, mentre nel secondo, e terzo se ne vogliono due; ma che nel primo vi era una sola condizione, e negli altri ve n' eran due: poichè cercandosi due numeri, ed essendo perciò due le cose ignote, due rapporti distinti dovevano anche esservi tra esse e le quantità note. Or nelle soluzioni da noi date, avendo rappresentata con $x$ una delle due incognite, cioè uno de' due numeri cercati, ci siamo serviti dell' una delle condizioni per esprimere l' altro numero nel primo, e dell'altra di esse ci siamo poi valuti per l' equazione al problema, dalla quale risoluta, ottenutosi il valore di un'incognita, presto se ne deriva quello dell'altra, per mezzo dell' altra condizione. Ma se le incognite si avessero voluto rappresentare l' una distintamente dall'altra, allora ciascuna condizione avrebbe dovuto costituire un equazione distinta; e sarebbero perciò state due le equazioni a ciascuno di que' due ultimi problemi, come due sono le incognite in ognuno di essi.

In fatti sia l' un de' numeri cercati espresso da $x$, l' la-

tro da $y$ ; si avrà pel problema II.

$x - y = a$ 1ª *equazione*

$xy = b^2$ 2ª *equazione*

e pel problema III.

$x - y = a$ 1ª *equazione*

$x^2y + y^2x = b^3$ 2ª *equazione*

Ed in altri casi ove le incognite fossero tre , e tre le condizioni per determinarle dalle note, il problema avrebbe tre equazioni ; e così in seguito.

240. E ciò che quì si è veduto potersi operare nell'un modo, o nell'altro, talvolta conviene di necessità farlo, riescendo intrigatissimo , o anche impossibile a potersi, cammin facendo nella soluzione, esprimere ciascuna incognita per l'altra, fino a pervenire ad un'equazione con una sola incognita. Che perciò si vede, che i problemi possono condurre ad una sola equazione con una sola incognita, o pure a più equazioni con incognite anche diverse , altrettante però in numero quante sono le incognite ; non potendo esservi compiuta soluzione di un problema , ove non siensi stabiliti tanti rapporti con quantità note , quante incognite distinte vi sono : dico distinte , o *dissocie* , cioè tali , che l' una non sia consegnenza dell' altra . Ciò non ostante , ove avvenga che il numero delle incognite sia maggiore di quello delle condizioni , fino ad un certo segno , l' Algebra ha fissati i limiti tra i quali dee contenersi ciascuna quantità cercata , e noi in appresso non tralasceremo anche di trattarne.

241. Def. viii. Chiamansi *determinati* que' problemi ne' quali le incognite , e le condizioni sono al numero stesso . E chiamasi *determinata* ogni equazione ad una sola incognita.

242. E qui vuolsi intendere che le condizioni sieno tra loro del tutto *diverse* , e non già *identiche* o *equivalenti* , cioè che l' una si possa determinare dall' altra , o dalle altre, nel qual caso il problema avrà sola apparenza di *determinato* . Di che sarà ragionato più appresso.

243. Def. ix. Che se poi il numero delle incognite sia maggiore di quello delle condizioni, allora il problema dirassi *indeterminato*; ed *indeterminata* dicesi puranche ogni equazione con due o più incognite.

244. Def. x. Quella parte dell' Analisi algebrica, che tratta de' problemi determinati, e del maneggiamento delle equazioni ad una sola incognita, o anche a più, quando abbiano luogo ad un tratto tante equazioni quante sono le incognite che le affettano, dicesi *Analisi determinata*; e chiamasi *indeterminata* quell'altra ove consideransi le equazioni, ed i problemi indeterminati.

## CAPITOLO II.

### Della maniera di apparecchiare un' equazione.

245. Allorchè proponesi a risolvere un' equazione, o pur che essa risulti, com' è la sua origine, da un problema sciolto coll' Analisi algebrica, la cosa alla quale conviene far attenzione, prima di adattarvi le regole pel risolvimento, si è di convenevolmente apparecchiarla, del che noi tratteremo in questo capitolo.

246. Le regole da seguirsi a tal proposito sono le seguenti.

### REGOLA I.

247. *Se ne' due membri di un' equazione vi sieno termini simili, conviene* contrarli; *il che si esegue, o ordinando l' equazione, o pure sommando quelli che sono in ciascun membro, e poi distruggendo ne' due la minor somma, con aggiungerla ad essi col contrario segno.*

Così l' equazione

$$x^3 - 2x^2 + 3b = 5x - 7x^2 + 2b$$

si riduce all' altra

$$x^3 + b = 5x - 5x^2$$

che ordinata, e ridotta a zero, diviene

$$x^3 + 5x^2 - 5x - b = o.$$

Similmente l' equazione

$$x^3 - ax^2 + cx = bx + f$$

si ridurrebbe ad

$$x^3 - ax^2 + (c - b)x = + f$$

o pure, riducendola a zero, ad

$$x^3 - ax^2 + (c - b)x - f = o.$$

### REGOLA II.

248. *Se tutt' i termini di un'equazione sieno moltiplicati per una stessa quantità, bisogna dividerli per questa. E se avessero un comun divisore, conviene moltiplicar per esso l' intera equazione.*

Per tal modo l' equazione

$$ax^3 + 4a^2x^2 + 5a^3x = a^4$$

si riduce all' altra

$$x^3 + 4ax^2 + 5a^2x = a^3.$$

E l' equazione

$$\frac{x^3}{m} + \frac{4a^2x^2}{bm} + \frac{5a^3x}{cm} = \frac{a^4}{m^2}$$

si riduce alla seguente

$$x^3 + \frac{4a^2x^2}{b} + \frac{5a^3x}{c} = \frac{a^4}{m}.$$

### REGOLA III.

249. *Se ne' termini dell' equazione proposta vi sia qualche fratto irriducibile, nel cui denominatore vi esista l' incognita dell' equazione; tutt' i termini dell' equazione debbono moltiplicarsi per tal denominatore, o per qualche fattore di esso.*

Così se abbiasi l' equazione

$$x^2 + \frac{a}{b - x} = cx,$$

moltiplicando tutt' i suoi termini per $b - x$, essa diverrà

$$bx^2 - x^3 + a = cbx - cx^2$$

cioè ordinandola ne' suoi termini, e moltiplicando ciascun di questi per $-1$, affinchè il primo termine diventi positivo (il che si esige per la risoluzione delle equazioni composte) essa diverrà

$$x^3 - (b + c)\,x^2 + bcx - a = o.$$

E nell' equazione

$$\frac{a^3 - ab^2}{2cy - c^2} = y - c$$

moltiplicando i suoi termini per $2cy - c^2$, o pure per $2y - c$, perchè svanisse l' ignota $y$ dal denominatore, essa equazione diverrà

$$\frac{a^3 - ab^2}{c} = 2y^2 - 3cy + c^2$$

che ordinata è la seguente

$$2y^2 - 3cy = \frac{a^3 - ab^2 - c^3}{c}.$$

## REGOLA IV.

250. *Se in un' equazione ordinata composta il primo termine si trovi affetto da coefficiente diverso dall' 1, bisogna dividere l' intera equazione per tal coefficiente.*

Così l' equazione ottenuta nella regola precedente riducesi ad

$$y^2 - \frac{3}{2}cy = \frac{a^3 - ab^2 - c^3}{2c}$$

E l' altra

$$ax^3 + bx^2 + cx = m$$

diviene

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x = \frac{m}{a}.$$

251. Ma in appresso mostreremo ancora per qual via possa un' equazione di questa forma trasformarsi in un' altra libera da coefficiente nel primo termine, e nel tempo stesso da un tal divisore.

## REGOLA V.

252. *Se nell' equazione proposta s' incontrino radicali irriducibili, che comprendano sotto del loro segno l' incognita, bisogna liberarnela. E ciò si esegue isolando in un membro dell' equazione uno per volta questi radicali, e poi elevando i due membri della medesima alla potenza dinotata dall' indice di quel radicale già isolato.*

Così nell' equazione

$$x^2 = \sqrt{(a^2 - x^2)} + b$$

trasportando il $b$ nel primo membro, si ha

$$x^2 - b = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

ed elevando a quadrato ciascun membro essa diviene libera dal radicale, e della seguente forma

$$x^4 - 2bx^2 + b^2 = a^2 - x^2$$

cioè, ordinandola,

$$x^4 - (2b - 1)x^2 + b^2 - a^2 = o.$$

E l' altra equazione

$$c\sqrt[3]{x^2} + a\sqrt{x} = m$$

trasportando l' un de' termini affetti dal radicale, sia il quadratico, nel secondo membro, e poi elevando a cubo diviene

$$c^3x^2 = m^3 - 3m^2a\sqrt{x} + 3a^2mx - a^3x\sqrt{x}$$

e di nuovo isolando il termine $-(3m^2a + a^3x)\sqrt{x}$ affetto dal radicale, e poi elevando a quadrato i due membri, e riducendo, essa si troverà interamente libera da' radicali, e della seguente forma ordinata

$$x^4 - \left(\frac{6a^2c^3m + a^6}{c^6}\right)x^3 + \left(\frac{3a^4m^2 - 2c^3m^3}{c^6}\right)x^2 - \frac{3a^2m^4x}{c^6} + \frac{m^6}{c^6} = o$$

E la medesima equazione di sopra proposta si avrebbe anche potuto ridurre in forma razionale col porre $x = y^6$; nel qual caso essa ad un tratto si sarebbe trasformata in

$$y^4 + \frac{ay^3}{c} = \frac{m}{c}.$$

Similmente l' altra equazione

$$y = \sqrt{[ay + y^2 - a\sqrt{(ay - y^2)}]}$$

elevandola a quadrato diviene

$$y^2 = ay + y^2 - a\sqrt{(ay - y^2)}$$

la quale, isolato il radicale che in questa si contiene, e quadrati di nuovo i due membri, e finalmente ordinando, si riduce a

$$2y^2 = ay$$

cioè

$$2y = a$$

253. Le operazioni prescritte nelle due ultime precedenti regole sono necessarie per poter anche definire il grado di un' equazione, non potendo questo assegnarsi che sola-

mente quando l' equazione non contiene l' incognita nè per divisore , nè sotto a segni radicali .

## REGOLA VI.

254. *Talvolta si può ridurre un' equazione composta , ridotta a zero , scindendola in fattori.*

Così l' equazione

$$y^3 + (2c - b)y^2 - 3bcy + b^2c = o$$

essendo divisibile per $y - b$ si vedrà scindersi ne' fattori

$$y^2 + 2cy - bc = o .$$

ed

$$y - b = o$$

Similmente l' altra equazione

$$x^4 - 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^4 = o$$

ponendovi $a^2 + b^2 = c^2$ si scinde nelle due seguenti

$$x^2 - (a + c)x + a^2 = o$$
$$x^2 - (a - c)x + a^2 = o.$$

255. E ciascun di tali fattori risulta ancor esso ridotto a zero ; poichè essendolo il loro prodotto, può ciò derivare sì dall' esser tale l' uno che l' altro fattore. E siffatto scindimento è necessariissimo non solo pel maneggio di tali equazioni ; ma per ben caratterizzar la natura de' problemi d' onde derivano , se questi alla Geometria si appartengano.

## REGOLA VII.

256. *Altre volte si può un' equazione composta ridurre per l' estrazione di radice. E ciò può anche eseguirsi con prima prepararla.*

Così avendosi l' equazione

$$x^4 + 2bx^3 + (b^2 - 2a^2)x^2 - 2ab^2x - a^2b^2 = o$$

se trasportisi il termine noto $- a^2b^2$ nel 2° membro, e si aggiunga di comune ad essi l' $a^4$ , si avrà

$$x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2a^2x^2 - 2ab^2x + a^4 = a^2(a^2 + b^2)$$

nella quale il primo membro essendo il quadrato di $x^2+bx+a^2$, si avrà però estraendo la radice quadrata da' due membri

$$x^2 + bx - a^2 = a\sqrt{(a^2 + b^2)}$$

E la risoluzione della proposta dipenderà da quella di questa ridotta al 2° grado.

257. Questa regola si vede essere conseguenza della precedente, equivalendo essa allo scindimento in fattori identici.

258. Le regole esposte in questo capitolo sono della massima importanza pe' giovani, per metterli al caso di convenevolmente maneggiare un' equazione; e la mancanza di esse nelle ordinarie istituzioni di Algebra mi ha fatto spesso avvertire ne' loro esami gli equivoci in cui facilmente incorrevano. Il Newton, che nel fatto d' istituzioni algebriche potevasi prendere a modello, ve le ha messe; nè so intendere perchè in seguito siensi da' compilatori di siffatti Elementi tralasciate.

# CAPITOLO III.

## Della maniera di risolvere le equazioni determinate di primo grado.

### Problema.

259. *Risolvere un'equazione determinata di primo grado.*

Allorchè siasi ordinata una tale equazione, l' incognita si troverà nel primo membro per moltiplicatore comune di tutt'i termini del medesimo (234.); che perciò questo verrà espresso dall' incognita moltiplicata nella somma di tutt' i suoi coefficienti; e quindi, se dividansi ambo i membri per tal somma, si verrà ad ottenere il valore dell'incognita; e solamente resterà a fare le riduzioni necessarie, ove ne occorrano.

### Esempii

260. I. Sia proposta l' equazione

$$ax + bx - m = cx - n$$

ordinandola sarà

$$ax + bx - cx = m - n$$

o sia

$$(a + b - c)\,x = m - n$$

ed

$$x = \frac{m-n}{a+b-c}$$

261. II. L' equazione proposta sia

$$\frac{ax}{m} + \frac{bx}{x} + \frac{r}{s} = cx + \frac{p}{q}$$

ordinandola sarà

$$\frac{ax}{m} + \frac{bx}{n} - cx = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$$

o sia

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} - c\right) x = \frac{p}{q} - \frac{s}{r}$$

cioè $$\left(\frac{an + bm - cmn}{mn}\right)x = \frac{ps - rq}{qs}$$

ed $$x = \frac{ps - rq}{qs} : \frac{an + bm - cmn}{mn} = \frac{(ps - rq)mn}{(an + bm - cmn)qs}$$

262. Ma nel caso proposto nel secondo esempio, e negli analoghi ad esso, può il maneggio dell'equazione rendersi più semplice nel seguente modo, cioè:

*Si moltiplichi l'intera equazione pel prodotto de' denominatori de' suoi termini frazionarii, tralasciando sempre que' fattori di talun di questi, che sono summoltiplici di altri, se pur se ne incontrino; si verranno per tal modo a rendere, com' è chiaro, i numeratori de' termini frazionarii esattamente divisibili pe' corrispondenti denominatori: ed eseguendo tale operazione, l' equazione risulterà libera da' fratti.*

Così nel caso proposto nell' esempio II., si moltiplichi tutta l' equazione per $mnqs$, e si eseguano nel tempo stesso le divisioni pe' denominatori rispettivi de' fratti, si avrà

$$anqsx + bmqsx + mnqr = cmnqsx + pmns$$

che ordinata, e poi risoluta, come si è detto di sopra, darà

$$x = \frac{pmns - mnqr}{anqs + bmqs - cmnqs}$$

E se l' equazione data fosse stata

$$\frac{ax}{4m^2} + \frac{bx}{2pn} = \frac{c}{8n^3}$$

sicccome il 4 e 'l $2n$, fattori de' primi due denominatori, sono summoltiplici dell' $8n^3$, ch' è l'altro denominatore; così basterà moltiplicare quell'equazione pel prodotto di $m^2$, di $p$, e di $8n^3$, cioè per $8pm^2n^3$, e si otterrà la ridotta libera da' fratti $$2apn^3x + 4bm^2n^2x = cpm^2$$
dalla quale si ha

$$x = \frac{cpm^2}{2apn^3 + 4bm^2n^2}.$$

# CATITOLO IV.

## Del maneggiamento di piu' equazioni di primo grado con altrettante incognite, per ottener l' eliminata da quelle.

263. Allorchè nel risolvere un problema determinato, in cui il quesito comprendeva più incognite, non si è potuto far uso delle condizioni di esso meno una, per pervenire così a stabilire con quest' ultima l' equazione finale al problema; ma che ciascuna condizione si è espressa per un' equazione separata tra quelle incognite [*], le quali equazioni non sono perciò, come si vede, equazioni al problema, ma rapporti algebricamente espressi tra le quantità del medesimo, da derivarne poi l' equazione suddetta ad una sola incognita; in tal caso è necessario che si conoscano le regole per pervenire a questa equazione finale.

264. Def. xi. L'equazione determinata che derivasi da più altre equazioni con altrettante incognite dicesi *eliminata*; ed il metodo, qualunque siasi, onde si fa di volta in volta svanire qualche una di quelle incognite nelle equazioni proposte, minorandosi corrispondentemente il numero di queste, si dice *eliminazione* dell' incognita.

265. Da quello che fu già detto nel §.242. si rileva, che le equazioni proposte per l' eliminazione; debbano essere *separate*, o sia *diverse* fra loro; poichè in altro caso esse non esprimerebbero già condizioni distinte del problema, ma una stessa condizione, e 'l problema per conseguenza, mancando del numero necessario di condizioni per esser determinato, resterebbe indeterminato.

[*] Talvolta ciò si esegue anche potendo direttamente pervenirsi all' equazione finale; perchè in quel modo si agevola la soluzione del problema.

266. L' importanza dell' argomento generale delle eliminazioni, e le difficoltà che s' incontrano nel cammino per pervenire all' eliminata, ha fatto sì che gli analisti si sien molto occupati di esso, d' onde sono risultati varii metodi più o meno conducenti, anzi più o meno praticabili, secondo i casi diversi; de' quali qui per ora si esporranno quelli per l' eliminazione tra le equazioni di primo grado, escogitati da' primi analisti italiani.

### Metodo per sostituzione o di trasporto, e metodo di pareggiamento.

267. Ho riuniti in un solo articolo questi due metodi, l' uno che ho detto *per sostituzione,* e da altri denominato *di trasporto*, il secondo *di pareggiamento*, per la loro grande affinità. Il primo di essi consiste in prendere in una delle equazioni proposte il valore di un' incognita, come se le altre fossero grandezze note, e sostituirlo nelle altre equazioni, sicchè quell' incognita venga a disparire. L' altro in prendere in ciascuna equazione il valore di una stessa incognita nelle altre, e pareggiar questi valori fra loro.

E se le nuove equazioni, che debbono anche essere una di meno del numero delle proposte contengano ancora più incognite, si continuerà ad operare nel modo stesso poc'anzi detto, fino ad ottenere l' eliminata.

### Esempii

268. I. *Equazioni date* $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ [18]

[18] Per simmetria di calcolo, i coefficienti della stessa incognita nelle diverse equazioni sogliònsi segnare con le stesse lettere, alle quali per distinguerle si affiggono le virgolette dette *apici*, come lo mostra questo esempio, ed i seguenti.

Dalla prima equazione si ha $x = \frac{c - by}{a}$; e questa espressione della $x$ nella $y$ e nelle quantità note $a$, $b$, $c$ sostituita nella seconda equazione darebbe l'eliminata in $y$

$$a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c'$$

cioè
$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c$$

che risoluta dà
$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

dal qual valore della $y$ si otterrà poi, per mezzo della sostituzione di esso nell' espressione di sopra trovata per la $x$, anche il valore di quest'altra incognita.

O pure si risolvano le due equazioni per rispetto alla $x$, o alla $y$; sia per rispetto alla $x$, si avrà

dalla 1ª
$$x = \frac{c - by}{a}.$$

dalla 2ª
$$x = \frac{c' - b'y}{a'}$$

che perciò dovendo la $x$ avere lo stesso valore nelle due equazioni, si avrà col pareggiamento di que' secondi membri la seguente eliminata

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'}$$

che maneggiata convenevolmente, darà come poc' anzi

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Ed ottenuta l'incognita $y$ è facile vedere che resterà determinata la $x$, con sostituire il valore della $y$ nell' equazione $x = \frac{c - by}{a}$, o nell' altra $\frac{c' - b'y}{a'}$.

269. II. Sieno

$$a\,x + b\,y + c\,z = m$$
$$a'\,x + b'\,y + c'\,z = m'$$
$$a''x + b''y + c''z = m''$$

tre equazioni proposte con tre incognite $x$, $y$, $z$.

Si prenda in una di esse, nella prima, il valore della $x$, ch'è $\frac{m-by-cz}{a}$, il quale si sostituisca in ciascuna delle altre due, che diverranno perciò

$$a'\times\frac{m-by-cz}{a}+b'y+c'z=m'$$

$$a''\times\frac{m-by-cz}{a}+b''y+c''z=m''$$

nelle quali vi sono le sole incognite $y,z$, e da esse si potranno ricavare, come nell' esempio precedente, i valori di $y$, $z$; e per mezzo di questi, e dell' equazione $x=\frac{m-by-cz}{a}$ quello della $x$.

O pure si prenda in ciascuna di quelle tre equazioni il valore di una stessa incognita $x$, si avrà

dalla 1ª $\quad x=\frac{m-by-cz}{a}$

dalla 2ª $\quad x=\frac{m'-b'y-c'z}{a'}$

dalla 3ª $\quad x=\frac{m''-b''y-c''z}{a''}$

i quali valori pareggiati tra loro daranno luogo alle due equazioni in $x$, $y$, cioè

$$\frac{m-by-cz}{a}=\frac{m'-b'y-c'z}{a'}$$

$$\frac{m-by-cz}{a}=\frac{m''-b''y-c''z}{a''}$$

dalle quali si avranno poi, col metodo stesso, i valori di $y$,$z$, e quindi quello della $x$.

270. Senza moltiplicare esempii, è evidente il progresso dell' operazione per ottener l' eliminata da un qualunque numero di equazioni; e solamente conviene avvertire, che nel-

l'eseguire i pareggiamenti delle diverse espressioni del valore di un'incognita, conviene sempre scegliere, nel pareggiarne due, quelle che posson condurre all' equazione più semplice.

271. Che se nelle equazioni proposte, o in alcuna di esse, non vi si contengano ad un tratto tutte le incognite, in tal caso non fa bisogno di nuove regole pel maneggio delle medesime; ma anzi le operazioni prescritte di sopra generalmente divengono più facili.

Così se l' equazioni proposte fossero

$$ax + by = m$$
$$a'x + c'z = m'$$
$$b''y + c''z = m''$$

Eliminando la $x$ dalle due prime equazioni, si avrà la seguente equazione in $y$ e $z$

$$ma' - ba'y = am' - ac'z$$

la quale combinata colla terza delle proposte darà i valori per $y$, $z$, e quindi poi quello della $x$.

### Metodo d' inserimento.

272. Sieno di nuovo le due equazioni con due incognite

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

egli è chiaro, che se fossero uguali i coefficienti $a$, $a'$ della $x$, o pur quelli $b$, $b'$ della $y$, allora si potrebbe ottenere l' eliminata in $y$, o in $x$ con la somma, o sottrazione delle equazioni proposte, secondo che que' coefficienti uguali si trovavano essere di contrario segno, o pur del medesimo.

Così supponendo $a = a'$, e positivi tali coefficienti, si avrà, per la sottrazione dell' un' equazione dall' altra

$$(b - b')y = c - c'.$$

Or è chiaro, che si potrà anche far uso di questo metodo per ottenere l' eliminata ogni qual volta, essendo disuguali i coefficienti di una stessa incognita, le equazioni proposte si

apparecchino per tal modo da farli divenire uguali.

273. Il primo mezzo che si offre per ciò è evidentemente quello d' introdurre, per fattore, in ciascuna equazione il coefficiente dell' incognita da eliminarsi nell' altra : così le equazioni proposte, operando in esse per eliminar la $x$, prenderanno la forma

$$aa'x + ba'y = ca'$$
$$aa'x + ab'y = ac'$$

che per la sottrazione di una dall' altra daranno la seguente eliminata in $y$

$$(ba' - ab')y = ca' - ac'.$$

E se si fosse voluto fare svanire la $y$, la forma di quelle equazioni sarebbe stata la seguente

$$ab'x + bb'y = cb'$$
$$ba'x + bb'y = bc'$$

e l' eliminata in $x$ sarebbe

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'$$

274. Che se le equazioni proposte fossero state tre, come nel §. 269 ; in tal caso si eliminerebbe la $x$ col metodo poc' anzi esposto tra esse equazioni due a due, cioè combinandone una con ciascuna delle due altre : si avranno per tal modo due equazioni in $y$, $z$, che trattate similmente condurranno a'valori delle tre incognite. E lo stesso si praticherebbe ne'casi che fossero quattro o più le equazioni proposte.

275. Il metodo esposto finora ne' numeri 273, 274, sebbene agevole pel suo andamento, contiene però in se un inconveniente rimarchevolissimo in alcuni casi, quello cioè d' introdurre fattori superflui nelle equazioni sulle quali si opera l' eliminazione, i quali, principalmente trattandosi di equazioni letterali, rendono l' eliminata assai implicata, e soggetta a riducimenti non sempre facili a ravvisarsi ; e ciò dipende da che per rendersi uguali i coefficienti di quell'incognita che si vuole eliminare, bastava moltiplicare l'un di questi per un fattore solo del coefficiente dell' altra.

276. Ad evitare tal inconveniente, si è cercato di andar dritto a rinvenire questo fattore, che bisogna introdurre in un' equazione, perchè il coefficiente dell' incognita di questa che vuole eliminarsi, divenghi uguale a quello della stessa in un' altra equazione; il che ha dato luogo alla seguente modificazione del poc' anzi esposto metodo.

277. Sieno
$$a x + b y = c$$
$$a' x + b' y = c'$$
le equazioni proposte; e dinoti $n$ quel fattore da introdursi nella prima, perchè volendosi eliminata la $x$ dalle due equazioni sia $an = a'$: si avrà per quella prima equazione l' altra
$$anx + bny = cn$$
dalla quale sottratta la seconda risulterà
$$(an - a')x + (bn - b')y = cn - c'.$$
Ma la $an = a'$, e quindi $n = \frac{a'}{a}$; ove il fratto $\frac{a'}{a}$ si suppone ridotto a minimi termini. Adunque per tal sostituzione svanirà effettivamente l' espressione in $x$, e si avrà l' eliminata in $y$ della seguente forma
$$\left(\frac{ba'}{a} - b'\right) y = \frac{ca'}{a} - c'$$
cioè
$$(ba' - ab')y = ca' - ac'$$
ch' è precisamente la stessa ottenuta di sopra (273.)

Che se $n$ fosse stato quel fattore che doveva rendere uguali i coefficienti della $y$, per dare l' eliminata in $x$, allora sarebbe stato $bn - b' = o$, ed $n = \frac{b'}{b}$ ridotto a minimi termini.

278. Or quando fossero tre le equazioni e le ignognite, come
$$ax + by + cz = m$$
$$a'x + b'y + c'z = m'$$
$$a''x + b''y + c''z = m''$$
s' incomincerebbe dall' introdurre in una di esse il fattore $n$, nella prima per esempio, ed in un' altra il fattore $k$, che sia

la seconda, e poi da ciascuna di queste si sottrarrebbe la terza; si avrebbero per tal modo le due equazioni

$$(an - a'')x + (bn - b'')y + (cn - c'')z = mn - m''$$
$$(a'k - a'')x + (b'k - b'')y + (c'k - c'')z = km' - m''$$

E volendo che in queste scomparisca la $x$, rimanendo così due altre equazioni in $y$, $z$, bisognerà ad un tratto supporre $an - a'' = o$, ed $a'k - a'' = o$, le quali equazioni daranno per $n$, $k$ i valori $\frac{a''}{a}$, $\frac{a''}{a'}$, che sostituiti in quelle equazioni rispettivamente, daranno le ridotte in $y$, $z$, dalle quali poi si passerà all' eliminata in una di esse solamente.

E ciascun vede quel che dovrebbesi fare, volendosi in quelle equazioni eliminare la $y$, o pur la $z$, in vece della $x$.

279. Potrebbesi anche, dopo aver introdotta nella prima il fattore $n$, e nella seconda l' altro $k$, sommar queste due insieme, e sottrarne poi la terza, sicchè si abbia l' equazione

$$(an+a'k-a'')x+(bn+b'k-b'')y+(cn+c'k-c'')z = mn+m'k-m'' \ldots M$$

e supponendo ad un tratto che sia

$$an + a'k - a'' = o$$
$$bn + b'k - b'' = o$$

col maneggio di queste due equazioni si avranno tali valori per le incognite $n$, $k$, che sostituiti nell' equazione M farebbero svanire i termini affetti da $x$, $y$, e resterebbe un' equazione nella sola $z$, che darebbe il valore di questa incognita.

Ed ognun vede bene da se quello che sarebbe stato uopo fare, per aver tale equazione nella sola $x$, o pur nella sola $y$.

280. Dal detto ne'due precedenti numeri sarà agevol cosa rilevar la regola da seguire, per applicar questo metodo di eliminazione a quattro equazioni con quattro incognite, o anche a maggior numero di equazioni con altrettante incognite.

181. Ed un tal metodo si potrà anche convenevolmente usare nel caso di più equazioni con altrettante incognite, le quali però non si contenghino tutte in ciascuna equazione,

come per la forma più generale di esse si è supposto aver luogo negli esempj recati di sopra.

282. Considerando attentamente i valori che risultano per le $x$, $y$ dalle due equazioni del §.268, i quali sono i seguenti

$$x = -\frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} \quad , \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

e gli altri che per le $x$, $y$, $z$ si hanno dalle tre equazioni del §. 269, che sono

$$x = \frac{+(bc' - b'c)m'' + (bm' - b'm)c'' - (cm' - c'm)b''}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

$$y = \frac{-(ac' - a'c)m'' + (am' - a'm)c'' - (cm' - c'm)a''}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

$$z = \frac{+(ab' - a'b)m'' + (am' - a'm)b'' + (bc' - b'c)a''}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

sarebbe agevol cosa rilevare la regola psr comporre tali espressioni, senza aver bisogno di effettuare il calcolo; da aver essa luogo anche quando non avvenga, che le equazioni proposte sieno compiute per rapporto al numero delle incognite, ove si abbia però l' avvertenza di supporre in ciascuna equazione l' incognita mancante come affetta dal coefficiente *zero*. Ed una tal regola che il Maclaurin diede in due teoremi nel suo *trattato di Algebra* [19] potrebbesi di leggieri estendere a più equazioni con altrettante incognite. Ma il Bezout posteriormente altra ne diede più acconcia e più generale, ch' è la seguente

## REGOLA BEZOUTIANA.

*Per calcolare tutti una volta, o separatamente i valori delle incognite, che risultano da altrettante equazioni di primo grado letterali, o numeriche.*

—

[19] Pag.86 ed 87 della versione francese.

283. Sia un numero d' incognite $x, y, z$ .... con altrettante equazioni, ed i coefficienti di ciascuna di esse nelle diverse equazioni ridotte a *zero* sieno rispettivamente $a, a'$, $a''$, ... per $x$ ; $b$, $b'$, $b''$, ... per $y$ ; $c$, $c'$, $c''$, ... per $z$ .... ed $m$, $m'$, $m''$, ... i termini noti.

1°. S' intenda il termine noto in ciascuna equazione ridotto nel primo membro, e moltiplicato anch' esso per un' incognita $t$ ; e di tutte quelle incognite, e di questa si faccia ad arbitrio la combinazione $xyzt$, purchè però una volta combinate con l' ordine che si vede, si conservi questo sempre lo stesso.

2°. Ciò posto si sostituisca in quel prodotto, di volta in volta, invece di ciascuna incognita il suo coefficiente nella prima equazione, e cambiando il segno ne' termini di luogo pari, si otterrà per tal modo l' espressione

$$ayzt - bxzt + cxyt - mxyz$$

che dirassi *prima linea* [10].

3°. Indi in questa prima linea cambiisi ciascuna incognita nel suo coefficiente nella seconda equazione, tenendo pe' segni la stessa regola poc' anzi data, sicchè abbiasi la *seconda linea*

$$(ab' - a'b)zt - (ac' - a'c)yt + (am' - a'm)yz$$
$$+ (bc' - b'c)xt - (bm' - b'm)xz + (cm' - c'm)xy$$

4°. Similmente in questa seconda linea si cambii ciascuna incognita nel suo coefficiente nella terza equazione, cioè la $x$ in $a''$, la $y$ in $b''$, la $z$ in $c''$, e la $t$ in $m''$, continuando a ritenere la stessa regola pe' segni ; si avrà la *terza linea*

$$[\ (ab'-a'b)c'' - (ac'-a'c)b'' + (bc'-b'c)a''\ ]t$$
$$-[\ (ab'-a'b)m'' - (am'-a'm)b'' + (bm'-b'm)a''\ ]z$$
$$+[\ (ac'-a'c)m'' - (am'-a'm)c'' + (cm'-c'm)a''\ ]y$$
$$-[\ (bc'-b'c)m'' - (bm'-b'm)c'' + (cm'-c'm)a''\ ]x$$

---

[10] Per render più chiara l' esposizione della presente regola i coefficienti delle $x, y, z, t$ prendonsi tutti come affetti dal segno $+$ ; mentre se ve ne fossero anche affetti dal $-$ basterà, nel termine ov' entra un tal coefficiente, cambiare il segno nel contrario a quello che risultava dalla regola.

e così continuerebbesi innanzi, se il numero delle equazioni e delle incognite fosse maggiore di tre, fino ad ottenere per un' ultima linea quella il cui ordine è dinotato dal numero delle equazioni.

5°. Ottenuta quest' ultima linea, che nel presente caso è la terza di sopra espressa, si otterrà da essa arbitrariamente il valore di quell' incognita che si vuole, dividendo il coefficiente di questa ( che perciò trovasi nelle precedenti linee fatta la riduzione di tutt' i termini ove una stessa incognita è fattore comune ) per quello che in questa stessa ultima linea si trova appartenente all' incognita introdotta. Sicchè nel caso presente si avrebbe

$$x = \frac{-[(bc' - b'c)m'' - (bm' - b'm)c'' + (cm' - c'm)b'']}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

$$y = \frac{+[(ac' - a'c)m'' - (am' - a'm)c'' + (cm' - c'm)a'']}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

$$z = \frac{-[(ab' - a'b)m'' - (am' - a'm)b'' + (bm' - b'm)a'']}{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''}$$

384. Il metodo esposto in questa regola ha anche il vantaggio di poter dare assolutamente quella delle incognite che si vuole; facilitandosi in tal caso il calcolo delle diverse linee soprindicate. Poichè in questo caso non bisognerà conservare in ciascuna linea che solamente que' termini in cui contiensi l' incognita che cercasi, e l' incognita introdotta. E volendo soltanto i valori di due incognite $x$, $y$ senza tener conto delle altre, si terrà solamente conto di que' termini, ov' esse e la $t$ s' incontrino; e così in appresso.

285. È ora necessario far vedere, che la regola data di sopra regge ancorchè nelle equazioni proposte non si trovino in ciascheduna tutte le incognite.

Sieno perciò le equazioni

$$ax + by + m = o$$
$$a'x + c'z + m' = o$$
$$b''y + c''z + m'' = o$$

Stabiliscasi il prodotto $xyzt$, introducendo per moltiplicatore delle $m$, $m'$, $m''$, la nuova incognita $t$; e poi da quel prodotto ricavisi la prima linea

$$ayzt - bxzt - mxyz$$

Da questa ottengasi la seconda linea

$$-ac'yt + am'yz - ba'zt + bc'xt - bm'xz - a'myz - c'mxy$$

o pure, nell' altra forma,

$$-ac'yt + (am' - a'm)yz - ba'zt + bc'xt - bm'xz - c'mxy,$$

e quindi la terza linea

$$- ac'b''t + ac'm''y + (am' - a'm)b''z - (am' - a'm)c''y$$
$$- a'bc''t + a'bm''z - bc'm''x + bm'c''x + b''mc'z$$

o pnre ridotta a

$$- (ac'b'' + a'bc'')t + [(am' - a'm)b'' + a'bm'']z$$
$$- [(am' - a'm)c'' - ac'm'']y + [(m'c'' - m''c')b + b''c'm]x$$

dalla quale si ha

$$x = \frac{-[(m'c'' - m''c')b + b''c'm]}{ac'b'' + a'bc''}$$

$$y = \frac{(am' - a'm)c'' - ac'm''}{ac'b'' + a'bc''}$$

$$z = \frac{-[(am' - a'm)b'' + a'bm'']}{ac'b'' + a'bc''}$$

che sono i valori di esse incognite tali quali sarebbero risultati con qualunque altro degli esposti metodi di eliminazione; e che soddisfano alle tre equazioni proposte, ed al problema ond' esse derivano.

286. Per maggior esercizio nella presente regola proporremo il seguente esempio di equazioni a coefficienti numerici.

Sieno le quattro equazioni

$$2u + 3x - 8 = o$$
$$3u + 2y - 9 = o$$
$$4x + 3z - 20 = o$$
$$2y + z - 10 = o$$

Formato il prodotto $uxyzt$, la prima linea sarà

$$2xyzt - 3uyzt - 8uxyz$$

la seconda linea

$-4xzt+18xyz-9yzt+6uzt-27uyz-24xyz-16uxz$

o pure

$-4xzt-6xyz-9yzt+6uzt-27uyz-16uxz$

la terza linea

$$-16zt+12xt+80xz-24yz-18xy+27yt+180yz$$
$$-18ut-120uz-81uy+64uz-18ux.$$

o pure

$$-16zt+12xt+80xz+156yz-18xy+27yt-18ut$$
$$-56uz-81uy-48ux$$

E finalmente la quarta linea sarà

$$38t+152z+114y+76x+38u$$

dalla quale si ricava $u=\frac{38}{38}$, $x=\frac{76}{38}$, $y=\frac{114}{38}$, $z=\frac{152}{38}$

cioè $u=1$, $x=2$, $y=3$, $z=4$.

## CAPITOLO V.

### Osservazioni sopra alcuni casi delle eliminazioni.

287. Se nel cercar l' eliminata di più equazioni con altrettante incognite avvenga che una di queste risulti zero, ciò indicherà che una delle equazioni ad arbitrio possa supprimersi, essendo compresa nelle altre

Così le equazioni proposte essendo

$$2x + 4y + 5z - 22 = o$$
$$3x + 5y + 2z - 30 = o$$
$$5x + 6y + 4z - 43 = o$$

se con qualunque de' metodi esposti eseguasi l' eliminazione, trovandosi esser *zero* la $z$, esse ridurrebbersi a

$$2x + 4y - 22 = o$$
$$3x + 5y - 30 = o$$
$$5x + 6y - 53 = o.$$

Ed è facile accorgersi che sommando le due prime e sottraendole dalla terza si abbia subito $y = 3$. E lo stesso se la seconda si fosse sommata alla terza e poi sottrattone il quadruplo della prima; o pur sottratta la prima della terza, e di nuovo dal risultamento la seconda. Il che ben indica esser ciascuna, come si è detto, conseguenza delle altre due.

288. Ciò che si è detto risulterà, adoperando la regola del Bezout, dallo svanimento di un' incognita in qualche linea.

Così nelle equazioni di sopra recate avendosi per prima linea

$$2yzt - 4xzt + 5xyt + 22xyz$$

per seconda

$$- 2zt + 11yt + 6yz - 17xt + 10xz - 106xy$$

e finalmente per terza

$$-27t - 81y - 135x$$

ove non trovasi più la $z$ ; dovrà questa risultare espressa da $\frac{0}{-27}$ , e però *zero*.

389. Un caso più rimarchevole nelle eliminazioni è quando nel corso delle operazioni che si fanno per giugnere all' eliminata , si perviene ad equazioni identiche ; di tal che il loro numero si restringe ad una. In tal caso siccome restano indeterminati i valori delle incognite in questa tale equazione, similmente indeterminato dovrà essere il problema d'onde sono tratte quelle equazioni *connesse* o *socie* con le altre. E si verrà in cognizione del grado d'indeterminazione del problema , ossia delle condizioni deficienti, dal vedere quante sono le incognite contenute in ciascuna di quelle equazioni identiche di cui si è detto . Di tal che se le incognite sien due , il problema mancava di una sola condizione , ed era perciò indeterminato per un grado ; se tre , mancavano al problema due condizioni, e così in seguito. Ma su di ciò si ritornerà in appresso , nel trattar de' problemi , e delle equazioni indeterminate [31]; e per ora basterà in rischiaramento del fin qui detto il seguente

### Esempio.

290. Sieno le segnenti tre equazioni

$$2x + 3y + 5z + 6 = o$$
$$3x + y + 2z + 5 = o$$
$$10x + 8y + 14z + 32 = o$$

nelle quali la terza evidentemente non è un' equazione *separata* , ma connessa con le altre due , derivando dalla somma di queste , di cui è il doppio.

Maneggiando tali equazioni con un de' metodi esposti di sopra , si troverà , che eliminandosi la $x$ dalla prima e se-

[31] Nel vol. II. del presente *Corso*.

conda di esse , perviensi ad avere l' equazione

$$7y + 11z + 8 = o$$

e similmente eliminando la stessa incognita tra la seconda e terza, se ne ottiene una identica alla precedente ; il che dimostra l' indeterminazione per un grado del problema cui corrispondono quelle tre equazioni.

291. Trattandosi le equazioni proposte colla regola del Bezout , si conoscerà che resti indeterminato il problema , allorchè diviene zero qualche una delle linee del medesimo, e si conoscerà di qual grado d' indeterminazione esso sia , dal vedere quale linea è quella che risulta identica ; di tal che essendo l' ultima , sarà esso indeterminato per un grado , per due se sia la penultima , e così in seguito.

# CAPITOLO VI.

## Considerazioni generali su i problemi, e sul modo di algebricamente risolverli.

292. Quantunque nel capitolo I. già siesi detta alcuna cosa intorno a' problemi; e che da que' pochi semplicissimi ivi addotti, per rischiarar le dottrine che concernevano essi e le equazioni che ne derivano, si potesse rilevare il modo da tenere per algebricamente risolverli, pure non è fuori proposito di quì ripigliare un tale argomento, affinchè più distinte divengano le nozioni su di esso, come ad un libro elementare si conviene.

293. Def. xii. Un problema si dirà algebricamente risoluto, se ( essendosi convenevolmente contrassegnate le *note* e l' *incognita* di esso ) con la guida delle sue condizioni siesi ottenuta un' equazione algebrica tra quelle e questa.

Poichè risoluta una tale equazione co' metodi ordinarj, la quantità ignota del problema risulterà determinata dalle note del medesimo.

294. E da ciò si vede, che la risoluzione algebrica de' problemi sia interamente riposta in quella delle equazioni cui essa riducesi, di tal che segua del tutto la natura di queste, e la suscettività ad esser risolute. E però un problema si dirà *dello stesso grado* dell' equazione ridotta alla quale si è pervenuto risolvendolo; e la soluzione di quello sarà sempre della stessa specie che quella di questa.

295. La difficoltà della soluzione algebrica di un problema sarà maggiore se più intrigato sia il nesso che lega le incognite alle note, e però più difficile riesca il traducimento delle condizioni in espressioni algebriche. E più ordinariamente ancora se maggiore sia il numero delle condizioni di esso.

296. Per ottener dunque quello sviluppo che nella precedente definizione si è stabilito per la soluzione di un problema conviene che l' analista:

I°. Stabilisca le quantità note, e l' ignota o le ignote di esso contrassegnandole con lettere dell' alfabeto, nel modo che fu detto nel §. 15.; nel che v' ha bisogno di una certa sagacia ed espertezza, da sceglier l'ignota per modo che più agevole riesca il cammino per pervenire all'equazione, e questa ne risulti della forma più semplice.

II°. Riduca in espressioni algebriche i rapporti che legano le ignote alle note, e che, come si è detto, costituiscono le condizioni del problema.

III°. Indi per mezzo di esse cerchi compiere un pareggiamento che costituisca l' equazione al problema; il qual pareggiamento potrà dedursi o dall'uguagliare un tutto alle sue parti, o dichiarando uguali due diverse espressioni della stessa cosa, o passando da una proporzione, sia aritmetica, sia geometrica, ad equazione.

297. Che se avvenga di poter trarre dalla soluzione di qualche problema una formola generale, allora si otterrà da questa il mezzo da risolverne tanti altri analoghi, con la semplice sostituzione in essa de' dati di quel problema speciale che sarà proposto.

Ed eccone di tutte le suddette cose l' applicazione ne' seguenti problemi.

### PROBLEMA I.

298. *Tre donne portano ognuna un cesto con uno stesso numero di poma, ed incontrandone nove altre, ciascuna delle tre dà ad ognuna delle nove lo stesso numero di poma dal suo cesto, ed in fine trovansi quelle e queste avere lo stesso numero di poma per ognuna. Si dimanda che parte delle poma che aveva ha ciascuna delle tre data a ciascuna delle nove.*

*Soluzione.*

Dalla stessa espressione del quesito del problema si rileva che l' incognita a stabilire per esso sia quel numero stesso di poma, che ciascuna delle tre ha date a ciascuna delle nove, e però esso indichisi per $x$. E poichè ciascuna delle tre donne ha dato a ciascuna delle nove il numero $x$ delle sue poma, avrà ognuna di queste conseguito il numero $3x$ di poma, mentre ognuna delle tre si troverà aver minorato il numero delle sue di $9x$ di poma; e quindi, supposto che già ne avesse il numero dinotato da $a$, gliene rimarrebbero $a - 9x$. Ma per la condizione del problema un tal numero dee esser quanto quello che ciascuna delle nove ha ricevute, cioè $3x$. Adunque l' equazione al problema sarà

$$3x = a - 9x$$

cioè

$$3x + 9x = a$$

ed

$$x = \frac{a}{3+9} = \frac{a}{12}$$

Il qual risultamento evidentemente verifica il problema; poichè a ciascuna delle prime tre donne rimarrebbe il numero di poma $a - \frac{9a}{12} = \frac{3a}{12}$, ch' è precisamente quello che ne avrebbe ricevuto ciascuna delle nove.

299. E se invece di esser 3 le prime donne, e 9 le seconde, il numero delle prime fosse generalmente espresso da $m$, e quello delle seconde da $n$; il numero dinotante la $x$ sarebbe risultato espresso da $\frac{a}{m+n}$. D' onde può rilevarsi generalmente, che:

*Se un tutto a sia diviso in tal numero di parti uguali, sicchè abbiasi il numero m di queste uguale all' eccesso di quel tutto sul numero n delle stesse; ciascuna di tali parti dovrà esser rappresentata dal tutto a diviso per m + n.*

## Problema II.

300. *Un padre lascia a quattro suoi figli un' eredità a condizione, che il primo abbia il numero a ducati più del secondo, questo abbia b ducati più del terzo, e similmente costui abbia c ducati più del quarto. Si cerca la parte dell' eredità toccata a ciascuno.*

### *Soluzione.*

Prendendo per ignota la parte del primo figlio, e dinotandola con $x$, è evidente che verrà espressa . . . . . . . . .
*la parte del 2° da* $x - a$
*quella del 3° da* $(x - a) - b$
*e l' altra del 4° da* $(x - a - b) - c$.

Ma debbono tutte queste porzioni comporre l' intera eredità, che essendo data potrà indicarsi per $h$. Adunque l' equazione corrispondente al problema sarà

$$x + (x - a) + (x - a) - b + (x - a - b) - c = h$$

cioè $$4x - 3a - 2b - c = h$$

dalla quale ottiensi immantinente il valore della $x$.

301. È facile rilevare dalla precedente soluzione, e dall' equazione cui si è pervenuto, che:

*Se le parti di un tutto, dinotante nel caso presente l' eredità, fossero state al numero n, superantisi successivamente per a, b, c, d, . . . , l' equazione risultante sarebbe stata*

$$nx - (n-1)a - (n-2)b - (n-3)c - (n-4)d \ldots = h$$

dalla quale rimangono risoluti tutt' i problemi analoghi al proposto.

### PROBLEMA III.

302. *Una persona avendo nel suo scrigno una somma di denaro, ne ha impiegata una data parte in un anno al suo mantenimento, ed accresciuto il rimanente del 5 per 100; e così avendo continuato a fare per altri tre anni, dopo scorsi i quattro anni ritrova avere nello scrigno la metà di quella somma che aveva da principio. Si vuol sapere quale questa fosse.*

*Soluzione.*

Indicando tal somma ignota per $x$, per $a$ quella impiegata nel primo anno, l'avanzo sarebbe stato $x - a$, che accresciuto del 5 per 100, cioè della sua parte *ventesima*, dà pel denaro rimasto nello scrigno

*dopo il 1°. anno* . . . $(x-a) + \frac{x-a}{20} = \frac{20+1}{20}(x-a)$

dal quale detraendone nel secondo anno la quantità $a$, si ridurrà a $\frac{20+1}{20}(x-a) - a$, che aumentato della parte ventesima farà conservare nello scrigno

*dopo il 2°. anno* . . . $\frac{20+1}{20}(x-a) - a + \frac{20+1}{20^2}(x-a) - \frac{a}{20} =$

$$\frac{20(20+1)}{20^2}(x-a) - \frac{20.a}{20} + \frac{20+1}{20^2}(x-a) - \frac{a}{20} =$$

$$\frac{(20+1)^2}{20^2}(x-a) - \frac{20+1}{20}a$$

E però consumatane la parte $a$, ed aumentato il residuo del ventesimo, si troverà rimanere nello scrigno

*dopo il 3°. anno* . . . $\frac{(20+1)^2}{20^2}(x-a) - \frac{(20+1)}{20}a - a$

$$+ \frac{(20+1)^2}{20^3}(x-a) - \frac{(20+1)}{20^2}a - \frac{a}{20}$$

che riducendo diviene

$$\frac{(20+1)^3}{20^3}(x-a)-\frac{(20+1)^2}{20^2}a-\frac{20+1}{20}a$$

E similmente operando si troverà esistente nello scrigno

*dopo il* 4°. *anno* . . . $\frac{(20+1)^4}{20^4}(x-a)-\frac{(20+1)^3}{20^3}a-\frac{(20+1)^2}{20^2}a-\frac{20+1}{20}a$

La qual somma dovendo, per la condizione del problema, pareggiare $\frac{1}{2}x$, darà l'equazione al medesimo, dal risolvimento della quale si otterrà il valore della $x$.

303. Il progresso dell' operazione eseguita pe' quattro anni, e per la parte ventesima di aumento del residuo annuale, continuando ad esser sempre uniforme, e la legge con la quale procedono i termini del risultamento essendosi resa chiara da' primi quattro anni pe' quali si è eseguita, si potrà stabilire generalmente, che per un numero $m$ di anni, e per la parte $n$ di cui si accresca annualmente ciascun residuo, la formola da stabilirsi debba essere

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m(x-a)-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-1}a-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-2}a-\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-3}a-\ldots-\frac{n+1}{n}a$$

per mezzo delle quale si potranno risolvere molti problemi affini al precedente.

304. E volendola ridurre in un convenevol teorema, potrà questo così enunciarsi.

*Se da un tutto tolgasi una data grandezza, ed al residuo si aggiunga la parte n di esso : e presa tal somma per un nuovo tutto vi si operi nel modo stesso, e così successivamente pel numero m di volte ; dovrà ottenersi per ultima quantità quella che si è di sopra espressa.*

305. Ma la precedente formola è suscettiva di un'assai elegante simplificazione. Di fatti essa riducesi ad

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^m x-a\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^m+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-1}+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{m-2}\ldots+\frac{n+1}{n}\right]$$

che ponendovi $\frac{n+1}{n}=b$ trasmutasi in

$$b^m x - ab(b^{m-1} + b^{m-2} + b^{m-3} + b^{m-4} \ldots\ldots + 1)$$

ove la serie nel vincolo costituente il secondo termine risulta da $\frac{b^m-1}{b-1}$( 86.*es*.II.). Laonde quella formola diviene

$$b^m x - \frac{b^m-1}{b-1}ab$$

E questa converrà adoperare ne' casi ove sarà bisogno.

306. Può in questi casi la formola suddetta pareggiare una parte del tutto da rinvenirsi, come nel problema si è supposto, o pure una quantità nota; e potrebbe egualmente esser noto il tutto, e cercarsi la parte da togliersene di volta in volta; o ancora esser noto il tutto e questa, e richiedersi la $n$, nel qual caso il problema sarebbe più difficile. E potrebbe finalmente richiedersi la $m$, nel qual caso il problema sarebbe *trascendente*, e da risolversi con l'uso de' logaritmi, come si vedrà più appresso.

307. E se da un tutto $t$ si tolga la parte ignota $x$, e dal residuo ancora una parte che gli serbi la stessa proporzione di $x:t$, cioè la parte $\frac{x}{t}$; e così sempre. Sarà $t-x$ il primo residuo; il secondo sarà

$$t-x-(t-x)\frac{x}{t}=\frac{t(t-x)-x(t-x)}{t}=\frac{(t-x)^2}{t};$$

e similmente si troverà il terzo residuo dinotato da $\frac{(t-x)^3}{t^2}$, il quarto da $\frac{(t-x)^4}{t^3}$, ed in generale il residuo dell'ordine $n$ da $\frac{(t-x)^n}{t^{n-1}}$. La quale espressione potrà servire di formola generale pe' problemi ove si cerchi che dopo un dato numero di quelle operazioni pervengasi ad una determinata parte di quel tutto.

308. Così essendo proposto il seguente problema :

*Un servitore togliendo da un vaso ove eranvi caraffe 81 di vino puro una quantità di esso vi supplisce acqua ; e ciò continua a fare per ben tre altre volte. Accortosi di ciò il padrone fa saggiare il vino , e vi si trovano sole 16 caraffe di vino puro. Vuol sapere quante caraffe di vino puro ne furono estratte la prima volta.*

La formola precedente in cui $t = 81$, $n = 4$, darebbe luogo all' equazione

$$\frac{(81-x)^4}{81^3} = 16$$

ed $$(81-x)^4 = 16\times81^3 = 16\times3^{12}$$

Quindi estraendo da' due membri la radice *quarta* sarà

$$81 - x = 2\times3^3 = 2\times27 = 54$$

ed $$x = 27.$$

In fatti $\frac{(81-27)^4}{81^3} = \frac{54^4}{81^3} = \frac{27^4\times2^4}{27^4} = 2^4 = 16$, come per la condizione del problema richiedevasi.

## CAPITOLO VII.

### Risoluzione di alcuni problemi determinati di primo grado (295.).

309. Poichè nell' apprendimento delle scienze gli esempj giovano ancor più che i semplici precetti, ho stimato quì raccogliere una buona mano di problemi, che non solo valessero a rischiarare le dottrine finora esposte ; ma ancora a dedur nuove regole, e dilucidare alcuni punti de' risultamenti che dall' analisi di essi ottengonsi . I giovani oltre a ciò riceveranno da' medesimi il vantaggio di ricrearsi alquanto lo spirito uscendo dalle sterili teoriche algebriche finora apprese, e vedendo di quale utilità esse possano essere per gli usi della vita civile .

#### Problema IV.

310. *Dimandato uno che ora fosse , rispose : le ore che debbono scorrere per terminare il giorno sono* $\frac{4}{3}$ *di quelle già scorse. Qual' ora era dunque ?*

#### Soluzione.

Sieno $x$ le ore già scorse ; le altre a scorrere per terminare l' intero giorno sarebbero $24 - x$ : ma queste debbono essere $\frac{4}{3}$ di quelle . Dunque l' equazione al problema sarà

$$\frac{4}{3}x = 24 - x$$

cioè $7x = 72$

ed $\quad = \frac{72}{7} = 10^{or}$ e $\frac{2}{7} = 10^{or}$ e $17'$ circa .

## Problema V.

311. *Sono tre numeri, ed il primo aggiunto alla terza parte del terzo è uguale al secondo; questo col terzo del primo uguaglia il terzo; ed il terzo supera il primo per 10. Si dimandano i numeri.*

### *Soluzione.*

Sia $x$ il primo numero; sarà per l'ultima condizione di sopra esposta il terzo espresso da $x + 10$; ma il secondo per la prima condizione è $x + \frac{x+10}{3}$, e per la seconda è quanto $x + 10 - \frac{x}{3}$. Adunque l'equazione al problema

sarà $$x + \frac{x+10}{3} = x + 10 - \frac{x}{3}$$

cioè $$x + 10 = 30 - x$$

e $$2x = 20 \quad , \quad x = 10.$$

Quindi il primo numero è 10, il terzo è 20, e 'l secondo $16\frac{2}{3}$.

### *Aliter.*

312. Sia $x$ il primo de'tre numeri proposti, $y$ il secondo, $z$ il terzo; avranno luogo le tre seguenti equazioni, ciascuna per ognuna delle tre condizioni di sopra stabilite, cioè sarà

$$1^a \quad x + \frac{z}{3} = y$$

$$2^a \quad y + \frac{x}{3} = z$$

$$3^a \quad x + 10 = z$$

E sottraendo la seconda dalla terza, e poi riducendo, si avrà

$$2x + 30 = 3y$$

Similmente riducendo la prima equazione, e poi sommando

la con la terza, si avrà

$$4x + 10 = 3y$$

che paragonata con quella di sopra ottenuta darà

$$2x + 30 = 4x + 10$$

d'onde si avrà $x = 10$; e con la sostituzione di tal valore in una delle due precedenti equazioni in $x$, $y$ si avrà $y = 16\frac{2}{3}$. Finalmente dalla terza delle equazioni al problema si otterrà dal valore della $x$ quello della $z$ espresso da 20.

313. Il paragone di queste due soluzioni può servir di prova per mostrare, che quando può pervenirsi ad ottenere una sola equazione finale ad un problema che contenga più condizioni ed altrettante incognite, bisogna sempre farlo, riescendo più facile il maneggio di questa sola equazione, che quello di più; e quindi più elegante la soluzione del problema: poichè l'eleganza di una soluzione algebrica di un problema aritmetico consiste, nell'ottenersi direttamente quell'equazione, che senza ulteriori ripieghi, e col più facil maneggio conduca alla determinazione dell'incognita principale stabilita nel problema.

### Problema VI.

314. *Un' agente $A$ produca l' effetto $a$ nel tempo $t$, l' altro $A'$ sia capace a produrre un consimile effetto $a'$ nel tempo $t'$. Similmente un terzo agente $A''$ produca l' effetto $a''$ nel tempo $t''$; e così di altri. Si dimanda in che tempo produrranno un effetto e tutt' i suddetti agenti agendo insieme.*

### *Soluzione.*

Sia $x$ un tal tempo. E supponendo l' effetto prodotto da ciascun agente proporzionale al tempo; però se A' produceva nel tempo $t$ l' effetto $a$, nel tempo $x$ dovrà produrre

l' effetto $\frac{ax}{t}$. Similmente sarà $\frac{a'x}{t'}$ l' effetto prodotto dall' agente A' nel tempo $t$, $\frac{a''x}{t''}$ quello prodotto dall' agente A'' nel tempo $t''$, e così in appresso; e questi effetti dovendo insieme equivalere all' effetto $e$, daranno luogo alla seguente equazione al problema

$$x\left(\frac{a}{t}+\frac{a'}{t'}+\frac{a''}{t''}\ldots\right)=e$$

e per mezzo di essa potranno risolversi non pochi problemi analoghi.

315. Così se fosse proposto il seguente

### Problema VII.

316. *Una vasca riceve acqua da quattro tubi, de' quali il primo da se solo la riempirebbe in un giorno, il secondo in due, il terzo in tre, il quarto in quattro giorni. Si dimanda il tempo in cui quella vasca si riempirebbe dandogli l' acqua i quattro tubi insieme.*

*Soluzione.*

Poichè l' effetto prodotto da ciascun tubo in diversi tempi è lo stesso, si potrà quindi porre uguale all' *unità*, e però l' equazione superiore diverrà in tal caso

$$x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=1$$

cioè $\qquad 12x+6x+4x+3x=12$

e quindi $\quad x=\frac{12}{25}$ *di giorno* $= 11^{or}$ e $31'$ circa.

### Problema VIII.

317. *Un mulo ed un asino trasportano barili di vino, e l' asino ne ha tanti che togliendone uno dal mulo, ed aggiu-*

*gnendolo a' suoi , ne verrebbe a portare il doppio numero di quelli del mulo ; al contrario se un sol barile si togliesse all'asino, e si dasse al mulo , sarebbero essi ugualmente carichi. Si dimanda il numero de' barili che ciascun di essi porta .*

*Soluzione.*

Sia $x$ il numero de' barili de' quali è gravato il mulo ; in tal caso , per la prima condizione del problema , l' asino avrebbe un numero di barili espresso da $2x - 3$ : ma per la seconda condizione , togliendosi da questa quantità un barile , ed aggiugnendolo all'altra $x$ , risultavano essi ugualmente caricati. Adunque sarà

$$2x - 4 = x + 1$$

ed

$$x = 5$$

cioè il mulo portava 5 barili , e l' asino 7.

PROBLEMA IX.

218. *Un maestro dimandato che numero di giovani avesse , rispose : la loro metà insieme col terzo e con la quarta parte di essi mancano dall' intero numero de' miei giovani per 10. Si cerca qual fosse un tal numero di allievi .*

*Soluzione.*

Sia $x$ quel numero di giovani , sarà l' equazione al presente problema

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 10 = x$$

cioè

$$6x + 4x + 3x + 120 = 12x$$

ed

$$x = -120.$$

319. Il risultamento di questo problema è un valore negativo per la $x$ , il quale soddisfa all' equazione d' onde si è ricavato , rendendosi uguali effettivamente i due membri

della medesima col sostituire — 120 ad $x$; ma intanto conviene esaminare cosa dinoti un tal valore negativo dell' incognita in rapporto al problema proposto. Or se riflettasi sulla condizione di tal problema, e quindi sull' equazione al medesimo, si rileverà facilmente, che le tre parti del numero de' giovani, che si disegnano dal professore già sono maggiori dell' intero numero, mentre $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ di una quantità sono maggiori di essa; che perciò è contraddittorio il volere ch' essa risulti da queste più 10. E ciascun vede, che il problema si ridurrebbe possibile, se si dicesse al contrario, che quelle tre parti superavano il numero de' giovani per 10; nel qual caso risulterebbe pel numero cercato + 120. Adunque il valore negativo dell' incognita in questa specie di equazione indica, che la quistione in quel modo proposta non può aver luogo, includendo una contraddizione, che per toglierla bisogna convenevolmente cambiar qualche cosa nell' enunciazione del problema nell' opposta.

### Problema X.

320. *Si dimanda un tal numero, che dal suo doppio togliendo 1, e dal doppio di questo residuo sottrattone 2, e finalmente diviso tal secondo residuo per 4; questo quoziente sia quanto il numero cercato meno 1.*

### *Soluzione.*

Sia $x$ quel numero; sarà $2x-1$ il primo residuo, $4x-4$ il secondo, ed $x-1$ il quoziente di esso diviso per 4; ond' è che l' equazione al proposto problema sarà

$$x-1=x-1.$$

321. Questa specie di equazione dicesi *identica*; e da essa, come si vede, in nessun modo può determinarsi valore per la $x$; e ciò deriva da che in effetto quel numero

dee restare indeterminato e generale, mentre ciò che nel proposto problema si dimanda non già ad un numero speciale, ma bensì a tutt' i numeri generalmente si compete, ossia che al proposto problema può soddisfarsi con un qualunque numero. Di fatti pongasi ad arbitrio 7 per la $x$, e preso di 7 il doppio meno 1, cioè 13, e di questo il doppio meno 2 cioè 24; un tal numero diviso per 4 darà per quoziente 6, ch' è minore per 1 del numero 7.

322. Adunque ne'casi che l'equazione alla quale si perviene risolvendo un problema algebricamente sia *identica*, il proposto problema diviene un teorema, cioè quello che in esso cercasi è proprietà del soggetto in quistione; e di fatti il problema di sopra proposto può nel seguente modo tramutarsi in

TEOREMA.

*Se il doppio di un numero si minori di 1, ed il doppio di questo residuo minorato di 2 si divida per 4; si otterrà per quoziente un numero minore del proposto per 1.*

323. Bisogna però avvertire, che per esser giusta la conseguenza quì dedotta dall'osservare che risolvendo un problema si giungeva ad una equazione identica, conviene che la soluzione del medesimo siasi convenevolmente condotta, senza mai essersi tenuto conto due volte di una stessa condizione. Poichè in questo caso l' identità dell' equazione finale, non già da una proprietà generale del soggetto in quistione dovrà derivarsi; ma bensì dalla condotta non regolare tenuta in risolvere il problema, la quale dava luogo ad una *petizione di principio*.

PROBLEMA. XI.

324. *Un padre lega in testamento a' suoi figli una somma di denaro da dividerla ugualmente, ed eseguita la divi-*

*sione si trova, che la porzione del primo è 100 scudi, e la decima parte del rimanente dell' eredità; quella del secondo è 200 scudi, ed un decimo di ciò che rimane; quella del terzo l' è 300 scudi, ed un decimo del residuo dell' eredità; la porzione del quarto l' è 400 scudi, ed un decimo del nuovo residuo; e così in seguito. Si vuol conoscere qual fosse l' eredità: quale il numero de' figli; e quindi ciò che sia toccato a ciascheduno?*

*Soluzione.*

Pongasi l' eredità $= z$, e la porzione di ciascun figlio $= x$; e però il loro numero $= \frac{z}{x}$. Si avranno le espressioni delle masse a dividere, e delle porzioni spettanti a ciascuno dinotate come quì appresso.

| *Masse a dividere* | *Ord. de' figli* | *Porzione di ciascuno* | *Differenza di ciascuna porzione dalla seg.* |
|---|---|---|---|
| $z$ | I° | $x = 100 + \frac{z-100}{10}$ | $100 - \frac{x+100}{10}$ |
| $z - x$ | II° | $x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$ | $100 - \frac{x+100}{10}$ |
| $z - 2x$ | III° | $x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$ | $100 - \frac{x+100}{10}$ |
| $z - 3x$ | IV° | $x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$ | $100 - \frac{x+100}{10}$ |
| $z - 4x$ | V° | $x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$ | $100 - \frac{x+100}{10}$ |
| $z - 5x$ | VI° | $x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$ | |
| ... | ... | ... ... | ... |

Or essendo uguali le porzioni di ciascun figlio, quelle differenze ottenute debbono esser tutte *zero*; e ritrovandosi esser la medesima l' espressione di ognuna di esse, basterà pareg-

giarne una ad arbitrio a zero ; sicchè si avrà l' equazione

$$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$$

che risoluta dà $x = 9000$

Sicchè la porzione di ciascun figlio è scudi 900; e questo numero sostituito per la $x$ in una delle equazioni della terza colonna , per esempio nella prima , dà

$$z = 8100 \text{ , eredità intera}$$

e quindi $\frac{z}{x} = 9$ , *numero de' figli.*

325. Questo problema di una natura tutta particolare, che però merita una speciale attenzione , per la maniera com' esso vien risoluto, fu per tal ragione recato dall' Eulero ne' suoi *Elementi di Algebra* §.604 vol. I.

### Problema XII.

326. *Tre negozianti A, B, C fatti i conti di loro casse rispettive trovano, che aggiugnendo alla cassa di A la metà di quelle di B e C compiesi la somma m di ducati ; e che la stessa somma risulterebbe con l' aggiugnere alla cassa di B il terzo del denaro di quelle di A , C , o con aggiugnere a quella di C il quarto di quelle di A , B. Si cerca il denaro di ciascuna cassa .*

*Soluzione.*

S' indichi con { $x$ *il denaro* di A; $y$ *quello* di B; $z$ *l' altro* di C }

Si avranno le tre condizioni del problema algebricamente espresse dalle seguenti rispettive equazioni

1ª $$x + \frac{y + z}{2} = m$$

2ª $$y + \frac{x + z}{3} = m$$

3ª $$z + \frac{x+y}{4} = m$$

che per maneggiarle più facilmente, si moltiplichi la 1ª per 2, e sottraggasi dalla seconda moltiplicata per 3, si avrà la

4ª $$2y = m + x$$

Parimente moltiplicando la prima per 8, e da essa sottraendo la 3ª moltiplicata per 4, si avrà la

5ª $$3y = 4m - 7x$$

Dalle quali due equazioni 4 e 5 si ha subito la

6ª $$3m + 3x = 8m - 14x$$

e però $$x = \frac{5m}{17}$$

d' onde per mezzo della 4ª si ha

$$y = \frac{11m}{17}$$

E finalmente sostituendo questi valori di $x$, $y$ nella 1ª, si avrà ancor $$z = \frac{13m}{17}$$

Co' quali valori sarà agevole verificare il proposto problema.

## Problema XIII.

327. *A, B, C, D giocando al tresette, A guadagna a B la metà del denaro che costui aveva ponendosi al gioco, B guadagna a C la terza parte del denaro che prima del gioco aveva, C a D la quarta parte di quello che aveva; e finalmente D ad A la quinta parte del denaro che costui aveva. Terminato il gioco si trova aver ciascuno la stessa somma a di denaro. Si dimanda qual fosse il denaro di ciascuno prima di cominciare il gioco.*

### *Soluzione.*

Sia $x$ *il denaro di A, y quello di B, z l'altro di C, u di D.* Le equazioni esprimenti le condizioni del problema saranno

1ª $\quad x + \frac{1}{2}y = a$

2ª $\quad y + \frac{1}{3}z = a$

3ª $\quad z + \frac{1}{4}u = a$

4ª $\quad u + \frac{1}{5}x = a$

Prendasi nella 1ª l' espressione di $x$ in $y$, e sostituiscasi nell' equazione 4ª, si avrà la

5ª $\quad u - \frac{1}{10}y = \frac{4}{5}a$

dalla quale prendendo l' espressione di $u$ in $y$, e sostituendola nella terza si ha la

6ª $\quad z + \frac{1}{40}y = \frac{4}{5}a$

la quale equazione combinata con la 2ª darà

$$y = \frac{88}{119}a.$$

Quindi dalla stessa 2ª si avrà

$$z = \frac{93}{119}a$$

e dalla 1ª otterrassi

$$x = \frac{75}{119}a.$$

Finalmente della 3ª si avrà

$$u = \frac{104}{119}a$$

E stabilendo per $a$ un moltiplice di 119, come per un caso il triplo 357, si avranno in numeri interi

$$x = 225 \;,\; y = 264 \;,\; z = 279 \;,\; u = 312$$

I quali numeri, come può facilmente verificarsi, soddisfano alle equazioni 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, e quindi alle condizioni del problema.

## CAPITOLO VIII.

### Della determinazione ne' problemi trattati con l'analisi algebrica.

328. La natura de' problemi è la stessa sia che vi si trattino quantità continue, e però alla Geometria si appartengano, sia che i dati ed il quesito sieno valori numerici, e però di spettanza dell' Aritmetica : e l' Algebra che riunisce ed assimila queste due specie di problemi, e dà loro un' andamento uniforme, dee per consegnenza assoggettarne i risultamenti alle stesse considerazioni. Che però del pari che ha luogo la *determinazione* ne' problemi geometrici, per vedere quando sieno possibili, e quando impossibili ; il che dipende talvolta dalla qualità de' dati pel loro rapporto ; lo stesso deve aver luogo ne' problemi aritmetici.

Questo importante argomento per la convenevole e compiuta risoluzioue de' problemi, per cui grandemente se ne occuparono, nel risolvere i problemi geometrici, gli antichi geometri, e coloro tra' moderni che hanno calcate le loro orme, trovandolo affatto trascurato nelle istituzioni di *Analisi algebrica*, ho stimato ben fatto introdurvelo ; e quindi ne dirò quì quanto si conviene per l' uso a farne ne' problemi aritmetici di 1° *grado* ; poichè in quelli di grado superiore più manifestamente deriva una tal determinazione dal risolvimento dell' equazione che vi dee soddisfare ; serbando il trattarne estesamente e di proposito nella dissertazione, su tale argomento, inserita nel vol. I° degli *Opuscoli matematici.*

329. Def. xiii. Per determinazione ne' problemi s' intende quella ricerca, sia astratta, sia dipendente dall' analisi di esso, mediante la quale si conosce se il problema sia possibile o no, ed in quali casi, ed in quanti avvenga l' una e l'altra di queste cose.

E talvolta ancora quali relazioni debbano avere i dati, o come debbano esser modificate le condizioni , perchè il problema riesca possibile ; la qual ricerca in questi casi costituisce la soluzione del problema , e determinata quella modificazione il trasmuta in un teorema; poichè con quella modificazione dee sempre aver luogo il quesito.

330. La determinazione dunque ne'problemi può precedere l' analisi di essi per convenevolmente condizionarli,o seguirla , per conoscernè la possibilità e l' impossibilità ; e nel primo di questi casi in quanti modi quella abbia luogo, o sia il problema possa risolversi.

## Problema I.

331. *Dividere un numero dato $a$ in due parti, sicchè la prima moltiplicata per $m$, e la seconda per $n$ producano insieme l' altro numero $b$.*

### *Soluzione.*

Sia $x$ l' una delle parti richieste di $a$, l' altra di esse sarà $a-x$, e per la condizione del problema si avrà

$$mx+n(a-x)=b$$

che ridotta darà

$$(m-n)\,x=b-na$$

ed

$$x=\frac{b-na}{m-n}.$$

### *Determinazione del problema , per risultamento dell' analisi di esso.*

La $x$ dovendo risultar positiva, se i numeri $m$ ed $n$ sieno interi , ed $m>n$ , bisogna che sia ancora $b>na$, cioè $b$ maggiore del moltiplice più piccolo della quantità da dividersi. Se al contrario $m<n$ , dovrà essere ancora $b<na$.

Che se essendo $m < n$ fosse $na < b$, il risultamento negativo indicherebbe, che, per esser possibile il problema, la condizione della somma di que' moltiplici delle parti di $a$ uguale a $b$, debba cambiarsi nell' opposta della differenza, cioè questa debba pareggiare $b$. Ed in tal caso l' equazione si cambierebbe in

$$(m+n)\,x = b + na$$

ed
$$x = \frac{b+na}{m+n}$$

E la stessa inversione di condizione dovrebbe aver luogo nel caso che essendo $m > n$ fosse $b < na$.

Che se la $m$ pareggiasse la $n$, sarebbe

$$x = \frac{b-na}{o}$$

la quale espressione a veder cosa significhi, basterà retrogradare nell' analisi del problema proposto all' equazione

$$(m-n)x = b - na$$

d' onde si avrebbe $b = na$, cioè a dire che debba in tal caso il numero $b$ essere quanto il moltiplice $n$ o pure $m$ di $a$. Il che risultava chiaramente dall' enunciazione del problema stesso, poichè il moltiplice di un tutto pareggia la somma degli ugual moltiplici delle sue parti. Ed in tal caso l' espressione $\frac{o}{o}$ in cui si troverebbe trasmutato il valore $\frac{b-na}{m-n}$ della $x$ indicherebbe una indeterminazione nel problema.

332. Al precedente problema sono analoghi i seguenti.

333. 1. *Date le gravità specifiche di due metalli, e quella di un loro composto, e data la massa di questo, assegnare la proporzione di que' metalli in questa massa* [32].

---

[32] Per dilucidazione della presente enunciazione si avverta, che per *gravità specifica* s' intende il peso di un corpo in un dato volume, e per *massa* quello per un volume qualunque; di tal che chiamata $g$ la

Esprimasi per $a$ il volume di questa massa, ed $x$ sia quello dell' un de' metalli, e $g$, $m$, $n$ esprimano le gravità specifiche del composto da essi, e di ciascuno separatamente; sarà $mx$ il peso dell' un di questi, ed $n(a-x)$ quello dell' altro; ed $ag$ il peso della massa data. Laonde si avrà

$$mx + na - nx = ng$$

ed

$$x = \frac{g-n}{m-n} a.$$

Il qual risultamento darebbe luogo alla stessa determinazione che quello del problema precedente.

334. Ognun vede che tal problema corrisponda alla ricerca fatta da Archimede per iscoprire il furto nella corona del re *Gerone*.

### Problema II.

335. *Di due vini, l' uno d' un prezzo m, l' altro n per ogni barile, siesi composto un barile del prezzo a. Si vuol sapere qual parte se n' è presa da ciascun di quelli.*

### *Soluzione.*

La soluzione eseguita con l' andamento stesso del problema generale (331.) darà luogo al risultamento

$$x = \frac{a-n}{m-n} b$$

ove $b$ dinota il barile. E la determinazione che vi avrà luogo sarà la stessa, che quella del problema precedente.

336. Il presente problema risolve, come si vede, il caso della regola di *alligazione in cui*, *dati i prezzi di una stessa quantità di liquidi diversi, si cerca quella parte che debba prendersi di ciascuno, perchè risulti la quantità stessa ad un dato prezzo.*

---

gravità specifica di un corpo nell' unità di volume e $v$ un volume qualunque, $m$ la massa corrispondente, si avrà

$$1 : v :: g : m, \text{ e però } m = vg.$$

### Problema III.

337. ***Due corpi A , B distanti l' un dall' altro per l'intervallo a muovansi per la stessa direzione e pel verso stesso, con le velocità c , c' ; ed essi incontrinsi dopo uno stesso tempo. Si cerca il punto di loro incontro.***

*Soluzione.*

Sia $x$ lo spazio che dee percorrere il corpo A più distante, per raggiugnere l' altro B ; sarà $x-a$ lo spazio da percorrersi da questo. E poichè nel *moto equabile*, come supponesi quello de' due corpi A,B, il tempo in che si percorre un dato spazio è quanto questo diviso per la velocità . Si avrà il *tempo di* A *espresso da* $\frac{x}{c}$

*e quello di* B *da* $\frac{x-a}{c'}$

le quali espressioni dovendo pareggiarsi daranno luogo alla seguente equazione

$$\frac{x}{c}=\frac{x-a}{c'}$$

o sia

$$c'x = cx - ca$$

$$cx - c'x = ca$$

$$x = \frac{ca}{c-c'}.$$

*Determinazione del problema.*

Dovendo risultar positiva la $x$, perchè il problema riesca possibile ne' termini com' è proposto, dovrà la $c$ velocità del corpo più distante dal punto di loro incontro superare la $c'$ velocità del corpo B.

Che se al contrario fosse $c'>c$, nel qual caso è manifesto

che A non potrebbe raggiugnere B, il risultamento negativo del valore $\frac{ca}{c-c'}$ della $x$ dinoterebbeesservi ne'dati, o nella condizione del problema una contraddizione da correggersi col trasmutamento, o di quelli, dando ad A la velocità di B, ed a B quella di A, o col modificare la condizione, cioè che invece di andare per lo stesso verso vadano l'un contro l'altro; nel qual caso si avrebbe l'equazione

$$c'x = ca - cx$$

ed

$$x = \frac{ca}{c+c'}$$

Che se $c = c'$, cioè che i due corpi si movessero con la stessa celerità, nel qual caso, com'è evidente, non mai potrebbero incontrarsi, il valore della $x$ diverrebbe

$$x = \frac{ca}{o}$$

espressione che non può dinotare altro che l'impossibilità dell'incontro. Ed essa di fatti equivalendo a quella di

$$(c'-c)x = ca$$

darebbe $ca = o$, ch'è impossibile.

E supponendo nulla la distanza $a$, cioè che i corpi partano dal luogo stesso, l'espressione della $x$, che sarebbe

$$x = \frac{o}{c'-c},$$

produrrebbe l'equazione

$$(c'-c)\,x = o$$

la quale potendo aver luogo col divenir zero l'uno o l'altro fattore, dinoterebbe nel caso di $x=o$, che i corpi A, B s'incontrano, come l'è, nel principio del loro movimento; e nel caso di $c'-c=o$, ch'essi incontransi sempre, essendo uguali le velocità; e però l'espressione $\frac{o}{c'-c}$, o ancora $\frac{o}{o}$, poichè $c'-c=o$, dinoterebbe un'indeterminazione nel problema.

## CAPITOLO IX.

### Della risoluzione delle equazioni di 2° grado, e della loro natura.

338. È già noto cosa intendasi per equazione del 2° grado (231.); ed è pur chiaro che la sua forma più semplice sia

$$x^2 = \pm q$$

o pure

$$x^2 \mp q = o$$

che dicesi *pura*; la più *completa*, che dicesi ancora *affetta* del 2° grado, quest' altra

$$x^2 \pm px \pm q = o$$

trovandosi in essa nel 1° *termine* l' incognita col coefficiente $+ 1$ (*reg.* IV.), e con l' esponente 2; nel *secondo* la stessa con l' esponente 1, e con un qualunque coefficiente positivo o negativo; e finalmente nel terzo termine quantità note.

339. È in oltre evidente che l' equazione *pura*

$$x^2 = \pm q$$

si risolva con estrarre la radice da ambo i membri, d' onde si ha

$$x = \pm \sqrt{\pm q}$$

cioè i due valori della $x$, o le due *radici* [31] di una tale equazione saranno $+\sqrt{\pm q}$, $-\sqrt{\pm q}$; ed esse soddisfano, com' è evidente, all' equazione. Ed è pur manifesto che debbano risultare entrambe reali, o entrambe immaginarie, secon-

[31] A questi valori della $x$ si diede da' primi analisti italiani il nome di *radici*, perchè effettivamente essi eran tali; e per analogia si estese ancora la stessa denominazione a' valori dell' incognita nelle equazioni *affette* del 2° grado, e poi alle equazioni di qualunque grado, nelle quali similmente per estrazion di radice ottengonsi i valori dell' incognita nel caso semplicissimo delle *pure*. Una tal denominazione non dee dunque tanto sembrare impropria a' *novatori* moderni, che la vorrebbero cambiata nell' altra di *risolventi*; e solamente converrà distinguere in *radice* di una quantità, e *radice* di un' equazione ( *Si tenga presente sul proposito il* discorso preliminare *verso la fine* ).

do che la quantità $q$, che pareggia la $x^2$ sia *positiva*, o *negativa* (142.).

340. Sia ora l'equazione *completa di 2° grado*

$$\text{I}^a \qquad x^2 + px + q = o$$

ove le $p$, $q$ che quì veggonsi indicate col segno $+$ possono essere quantità positive, o negative, come si vuole, il che dà all'equazione proposta le quattro forme seguenti, cioè l'identica ad essa anche ne' segni

$$\text{II}^a \qquad x^2 - px + q = o$$
$$\text{III}^a \qquad x^2 + px - q = o$$
$$\text{IV}^a \qquad x^2 - px - q = o$$

Or la prima idea che si presenta in risolverla si è di vedere se possa ancora riescirvisi per l'estrazion di radice; e poichè trasportando il terzo termine $q$ nel secondo membro (opereremo sulla 1ª equazione, che vale ancor per le altre) si ha

$$x^2 + px = - q$$

che può anche porsi sotto la forma

$$x^2 + 2x \times \frac{p}{2} = - q$$

ove si vede che il binomio costituente il primo membro è composto dal quadrato del numero $x$, e dal doppio prodotto di tal numero nell'altro $\frac{p}{2}$; che però se ad esso binomio si aggiugnesse il quadrato di $\frac{p}{2}$, il trinomio risultante sarebbe il quadrato di $x + \frac{p}{2}$ (158.). Quindi aggiugnendo effettivamente tal quantità a' due membri, per non turbare l'equazione proposta, risulterà

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

cioè

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ed estraendo da' medesimi la radice quadrata, si avrà

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

ed
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

cioè l' equazione proposta avrà per radici le due seguenti

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)} \quad , \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

341. E volendo anche dinotarle com' esse risultano dalle tre forme soprindicate , si avrà dalla

$$\text{II}^a \quad x = +\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$$

$$\text{III}^a \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} + q)}$$

$$\text{IV}^a \quad x = +\frac{p}{2} \quad \sqrt{(\frac{p^2}{4} + q)}$$

E ciascuna di queste radici si vedrà , con la sostituzione , soddisfare all' equazione cui corrisponde .

342. Sicchè la regola per risolvere un' equazione completa di 2° grado, convenevolmente apparecchiata, è la seguente :

*Si passi nel secondo membro il termine noto della medesima ; si compia il quadrato del primo membro, aggiugnendo al binomio che lo rappresenta la metà del coefficiente del secondo termine dell' equazione , che per non turbarla , si aggiugne anche al secondo membro di essa. Finalmente , estratta la radice da ambo i membri così apparecchiati , si trasporti il termine noto dal primo membro nel secondo : si avranno in tal modo i due valori dell' incognita.*

343. Poteva ancora ottenersi la risoluzione dell' equazione di 2° grado *affetta* riducendola a *pura* ; poichè essendo

$$x^2 \pm px = \mp q$$

cioè
$$(x \pm p)x = \mp q$$

col porre $x = y \mp \frac{p}{2}$, si avrà la trasformata

$$(y + \frac{p}{2})(y - \frac{p}{2}) = \mp q$$

o sia $$y^2 - \frac{p}{4} = \mp q$$

quindi $$y^2 = + \frac{p}{4} \mp q$$

ed $$y = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} \mp q\right)}$$

ove riponendo per $y$ la $x \mp \frac{p}{2}$, si ha

$$x \mp \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} \mp q\right)}$$

ed $$x = \pm \frac{p}{2} \quad \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} \mp q\right)}$$

come prima si erano ottenute.

344. Dall'ispezione di queste radici qualunque sia il modo col quale siensi ottenute, si potrà dedurre la seguente regola, per ricavarle da un' equazione completa di secondo grado senza maneggiarla.

*In ogni equazione completa di secondo grado ridotta a zero, l' incognita è uguale alla metà del coefficiente del secondo termine dell' equazione preso col segno contrario, aggiuntavi, per l'un de' valori, la radice del binomio rappresentato dal quadrato della suddetta metà, e dal termine noto dell' equazione col segno contrario, e per l' altro valore, toltone questo stesso radicale.*

Di modo che, se l' equazione fosse la seguente

$$x^2 + 6x - 5 = o$$

le sue radici sarebbero

$$x = -3 \pm \sqrt{(9 + 5)} = -3 \pm \sqrt{14}.$$

345. Risulta anche da ciò che *il coefficiente del secondo termine di un' equazione completa del 2° grado, preso col segno contrario, sia quanto la somma delle sue due radici*: che però non avendo luogo un tal termine nelle equazioni *pure* debbano in queste le radici essere uguali e di segno con-

trario; come per altro dimostravalo, ne' due casi, la semplice ispezione di esse. Ed in oltre dal §. 76. combinato con la regola precedente risulta, che *il terzo termine sia quanto il prodotto delle due radici dell' equazione*. Di fatti

$$\left(\mp\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\mp q\right)}\right)\left(\mp\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}\pm q=\pm q$$

346. Che se le cose precedentemente dimostrate concernenti la natura delle equazioni di 2° grado si volessero stabilire direttamente, senza dedurle dalla loro risoluzione, si consideri il binomio $x^2 \pm px$, cioè il prodotto $x(x \pm p)$; sarà chiaro essere il medesimo suscettivo d' infiniti valori, o espressioni di valori, secondo che se ne attribuiranno alla quantità indeterminata $x$, supponendo determinata l' altra $p$. Ma se poi ad esso aggiungasi la condizione di dover pareggiare una quantità data $q$, si vede che quello perdendo lo stato d' indeterminazione, possa per la condizione aggiunta aver solamente luogo per dati valori della $x$.

347. Or suppongasi l'un di questi valori rappresentato da $a$, sicchè con la sostituzione di $a$ alla $x$ diventi effettivamente

$$a(a \pm p) = q$$

sottraendo questa uguaglianza dalla

$$x(x \pm p) = q$$

si avrà

$$x^2 - a^2 \pm p(x - a) = o$$

cioè, dividendo pel fattore comune $x - a$, sarà

$$x + a \pm p = o$$

ed

$$x = -(a \pm p)$$

Sicchè vedesi che quel valore $a$, che può rendere effettivamente il binomio $x(x \pm p)$ uguale a $q$, ne trae seco necessariamente l'altro $-(a \pm p)$, per mezzo del quale debba aver luogo lo stesso pareggiamento. E risulta pur evidente esser tali questi due valori della $x$, che la loro somma pareggi il coefficiente $p$ della $x$ col segno contrario a quello che aveva nel 2° termine dell' equazione

$$x^2 \pm px \pm q = o$$

da che risulta di nuovo come nel §. 345., che il *coefficiente del secondo termine di un' equazione del 2° grado debba pareggiare la somma delle due radici di essa, col segno contrario al suo.*

348. Ed essendo

$$x^2 \pm px = \mp q$$

ed $\qquad x = a$, o pure $= -(a \pm p)$

si vede che siccome l'$x$ è un divisore esatto di $x^2 \pm px$, così debba essere tanto $a$, che $-(a \pm p)$ un divisore esatto di $\mp q$. Or abbiasi pel primo di questi quozienti $m$, pel secondo $n$, sarà nel primo caso

$$a(x \pm p) = \mp am$$

ed $\qquad x \pm p = \mp m$

e nel secondo caso

$$-(a \pm p)\, x = -(a \pm p) n$$

cioè $\qquad x = n.$

Sicchè vedesi che dal dividere $q$, ossia il terzo termine dell' equazione, per l' una delle radici debba risultarne per quoziente necessariamente l' altra, ossia che: *il terzo termine dell' equazione sia quanto il prodotto delle due radici*, come già si era rilevato nel §.345.

349. Si vede anche da ciò che l' equazione di 2° grado

$$x^2 + px + q = o$$

le cui radici sieno $m$, $n$ debba aver per divisori esatti i binomi $x - m = o$, $x - n = o$, dal cui prodotto debba essa risultare

350. Avendo di sopra osservato (340.), che l' equazione completa di 2° grado può presentarsi sotto quattro diverse forme, dipendenti da' segni onde sono affetti il secondo e terzo termine di essa, conviene ora indagare quali modificazioni ciò possa indurre nella natura delle radici della medesima. Presa perciò la formola generale di esse radici, che si è ve-

duto essere $x = \frac{\mp p \pm \sqrt{(p^2 \mp 4q)}}{2}$ ognun rileva facilmente, che sarà sempre reale il radicale ch' è l' un de' termini del valore della $x$, se in esso si abbia $+4q$; o pure che ritrovandovisi $-4q$, sia $4q < p^2$. Adunque:

*Un' equazione di secondo grado col terzo termine negativo, avrà le due radici reali. E queste lo saranno pure reali in caso che essendo positivo quel terzo termine, il quadruplo di esso sia minore del quadrato del coefficiente del secondo termine.*

Che se in questo caso fosse $4q = p^2$, svanirà il radicale, e l'equazione avrà due radici uguali e di segno contrario, ciascuna espressa dalla metà del coefficiente del secondo termine; e ciò avviene quando l' equazione ridotta a zero era già un quadrato perfetto, sicchè non v' era bisogno per risolverla dell' ordinario metodo di sopra esposto, ma bastava estrarre da essa la radice quadrata, com' è nel caso dell' equazione

$$x^2 \pm 2ax + \frac{1}{4}a^2 = o$$

che dà all' istante, con l' estrazione di radice,

$$x \pm \frac{1}{2}a = o \qquad \text{, ed} \qquad x = \mp \frac{1}{2}a$$

351. Rimane a considerare il caso in cui l'equazione proposta, avendo il terzo termine espresso da $+q$, sia $4q > p^2$.

*In tal caso quel radicale sarà immaginario, e tali perciò saranno le due radici dell' equazione, e della forma*

$$x = \frac{\mp p \pm \sqrt{(4q - p^2)}\sqrt{-1}}{2}$$

e quindi i fattori immaginari di quest' equazione saranno

$$x \mp \frac{p - \sqrt{(4q - p^2)}\sqrt{-1}}{2} = o$$

$$x \mp \frac{p + \sqrt{(4q - p^2)}\sqrt{-1}}{2} = o$$

della forma stabilita nel §. 150. *esemp.* II.

352. Ritornando a' casi dell' equazione proposta in cui le

sue radici sieno reali (350.), è chiaro, che se la $p$ è positiva e maggiore di $\sqrt{(p^2 \mp 4q)}$, le radici saranno entrambe positive; e se minore di $\sqrt{(p^2 \mp 4q)}$, l'una sarà positiva, l'altra negativa. Al contrario se la $p$ è negativa, e minore di $\sqrt{(p^2 \mp 4q)}$, l'una delle radici sarà positiva, l'altra negativa; se maggiore di $\sqrt{(p^2 \mp 4q)}$ le radici saranno entrambe negative. Adunque:

353. *Un' equazione di secondo grado a radici reali, se ha il secondo termine affetto dal segno —, può avere le sue radici o tutte due positive, o una positiva l'altra negativa: se poi il secondo termine sia affetto dal segno +, le radici di tal equazione, o saranno tutte due negative, o l'una positiva l'altra negativa.*

354. Ne' casi però ultimamente considerati le radici essendo possibili, tale è anche il problema cui esse corrispondono; e solamente è da avvertire, che le radici negative dinotano che può anche un numero astratto di natura negativo soddisfare alle condizioni del problema proposto; se pure la qualità della quistione non indichi chiaramente tale trasformazione di esse da far corrispondere, come si disse ne' problemi di 1° grado (319.), la radice negativa ad una condizione inversa del problema; e ciò verrà rischiarato dagli esempi che addurremo. Quando poi le radici sieno immaginarie, ciò dinota che il problema d'onde derivano, o cui corrisponde l'equazione alla quale esse appartengono sia impossibile.

## CAPITOLO X.

### Un primo sbozzo sulla natura de' problemi, e come dinotata dalle loro equazioni.

355. Fin dal cap. I. di questo libro II. si è veduto, che l' analisi algebrica de' problemi conduca per essi ad equazioni diverse nel grado, la qual cosa verrà sempre più confermata da quelli che per esercizio de' giovani risolveremo nel capitolo seguente. Ed è ormai tempo di loro dichiarare in che sia riposta questa essenzial diversità di natura de' problemi, che dalla loro equazione caratteristica viene rappresentata; poichè le considerazioni che ora riescon semplici e chiare applicandole a' problemi di 1° e 2° grado è poi agevole estenderle a quelli di grado superiore al 2°.

Conseguiremo un sì importante scopo dalle considerazioni che stabiliremo su i seguenti problemi.

#### Problema I.

356. *Dividere il numero 100 in due parti l' una delle quali stia all' altra come 3 a 2.*

*Soluzione.*

Dinotando con $x$ l' una delle parti, l' altra verrà espressa da $100 - x$, e per la condizione del problema starà

$$x : 100 - x :: 3 : 2$$

quindi $$2x = 300 - 3x$$

ed $$x = 60.$$

*Osservazione.*

357. Riflettendo sul problema, e sul modo tenuto in risol-

verlo si scorge subito,che con essersi designata per $x$ la parte maggiore, non possa questa risultare che in un solo modo, e di una sola quantità, e però che doveva venire dinotata da un' equazione del 1° grado. E per la stessa ragione se si fosse dinotata per $x$ la parte minore, cioè quella che doveva corrispondere al conseguente 2 della ragion data, l' equazione che l' avrebbe dinotata sarebbe stata

$$3x = 200 - 2x$$

ed

$$x = 40.$$

Che se si fosse indicata per $x$ la semidifferenza delle due parti, sicchè l'una di esse venisse espressa da $50 + x$, l' altra da $50 - x$, l' equazione al problema sarebbe risultata

$$5x = 50 \, , \qquad \text{ed} \qquad x = 10$$

e però sempre del 1° grado, poichè la quantità che cercasi non può essere che una sola, ed in un sol modo espressa.

### Problema II.

358. *Dividere il numero 100 in due parti, sicchè il loro prodotto pareggi 1600.*

### *Soluzione.*

Dinotando con $x$ l' una delle parti, e però con $100 - x$ l' altra, si avrà pel problema la seguente equazione

$$100x - x^2 = 1600$$

che risoluta dà per la $x$ due valori, cioè

$$x = 80 \quad , \quad x = 20.$$

### *Osservazione.*

359. Questo doppio valore della $x$, cioè la doppia soluzione che può ricevere il presente problema, dipende, com' è chiaro, dal non essersi nell'analisi potuto indicare quale delle parti si esprimesse con $x$ cioè se la minore, o pur la

maggiore. Sicchè l'analisi del problema doveva indifferentemente offrirne sì l'una che l'altra.

E lo stesso sarebbe avvenuto se per la $x$ si fosse dinotata la semidifferenza delle due parti, nel qual caso l'equazione sarebbe stata $x^2 = 900$
ed $x = \pm 30$
dovendosi con ciò avere ad un tempo ciascuna delle parti; l'una delle quali si ottiene con aggiugnere alla metà di 100 il 30, l'altra col toglierlo.

### Problema III.

360. *Posto che la luce la quale diffondesi da un corpo luminoso decresce d'intensità a misura che cresce il quadrato della distanza dal corpo che la diffonde. Si vuol rinvenire quel punto nella distanza a tra' due corpi luminosi A, B delle intensità rispettive m, n, ove le attività di loro luce divengano uguali.*

*Soluzione.*

A————————C————B

Sia C un tal punto, e la BC distanza di esso dal corpo luminoso B dell'intensità minore $n$ si dinoti per $x$; verrà l'altra distanza AC di quel punto dal corpo luminoso A dell'intensità $m$ espressa da $a - x$. E l'intensità della luce di A nel punto C sarà espressa da $\frac{m}{(a-x)^2}$, quella di B da $\frac{n}{x^2}$. Ma queste si vogliono uguali in tal punto. Adunque l'equazione al problema sarà

$$\frac{m}{(a-x)^2} = \frac{n}{x^2}$$

che convenevolmente ridotta diverrà

$$x^2 + \frac{2nax}{m-n} = \frac{na^2}{m-n}$$

che risoluta darà

$$x = -\frac{na}{m-n} \pm \frac{a}{m-n}\sqrt{nm}$$

Ed è chiaro che essendo $m > n$, sarà $\sqrt{nm} > n$, e quindi l'una di quelle radici sarà positiva, l' altra negativa.

*Osservazione.*

A——————C————B.............................C′

La radice positiva

$$x = -\frac{na}{m-n} + \frac{a}{m-n}\sqrt{mn}$$

dinota la BC, e quindi assegna il punto C tra i due corpi luminosi A,B ov'essi illuminano ugualmente: ma come che ciò dee ancora avvenire in un altro punto della AC prolungata dal verso B; un tal punto C′, che nel caso che il problema si fosse così proposto rinverrebbesi con la stessa analisi, risulta definito dalla radice negativa

$$x = -\frac{na}{m-n} - \frac{a}{m-n}\sqrt{mn}$$

Di fatti risolvasi il problema per questo caso, ponendo cioè $BC' = x$, ed $AC' = a + x$ sarà l' intensità della luce di A in C espressa da $\frac{m}{(a+x)^2}$, e quella di B, anche in C′, da $\frac{n}{x^2}$, e l' equazione al problema si troverrebbe essere

$$x^2 - \frac{2nax}{m-n} = \frac{na^2}{m-n}$$

che risoluta darebbe

$$x = \frac{na}{m-n} \pm \frac{a}{m-n}\sqrt{mn}$$

ove del pari che si è invertita la supposizione per la $x$, supponendosi il punto C′ nella AB prolungata, si veggono ancora invertite le radici, corrispondendo la positiva di ora alla negativa di prima, e la negativa alla positiva dal primo caso.

361. E per maggiormente render manifesto il fin qui esposto, suppongasi la distanza AB de' due corpi $= 100$ *palmi*, la $m = 4$, la $n = 1$, cioè che la luce del corpo A sia d' intensità quadrupla di quella di B, si avrebbe $\frac{a}{m-n}\sqrt{mn} = 66\frac{2}{3}$, e toltone $\frac{na}{m-n} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$, risulterebbe la distanza $BC = 33\frac{1}{3}$, e però la $AC = 66\frac{2}{3}$. Quindi la luce del corpo B in C sarebbe espressa da $\frac{1}{(33\frac{1}{3})^2}$, e quella del corpo A da $\frac{4}{(66\frac{2}{3})^2} = \frac{2^2}{2^2(33\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{(33\frac{1}{3})^2}$, pari a quella del corpo B.

Al contrario l'altra radice negativa da corrispondere, come si è detto, al punto C', essendo espressa da $a\,\frac{n+\sqrt{mn}}{m-n}$ che nel caso presente diviene 100, risulterà $AC' = 200$. Sicchè l' attività della luce di B in C' si trova essere $\frac{1}{100^2}$, e quella di A verrà espressa da $\frac{4}{200^2} = \frac{2^2}{2^2.100^2} = \frac{1}{100^2}$, e però uguale a quella di B.

E la stessa verifica avrebbe luogo nel caso che si fosse trattata l' analisi del problema nel secondo modo di sopra tenuto, cioè andando direttamente in cerca del punto C'.

362. A comprovare lo stesso assunto io altro modo, suppongasi presa la $x$ dal punto A del lume di maggiore intensità $m$; proseguendo l' analisi del problema come si è praticato nel n°. 360, si perverrà all' equazione

$$\frac{(a-x)^2}{x^2} = \frac{n}{m}$$

e quindi

$$\frac{a-x}{x}=\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$$

dalla quale risulta evidentemente, che volendo prendere il radicale col segno +, debba la $x$ esser minore di $a$, e però cadere il punto richiesto tra A e B, come l'è C; mentre se vogliasi prendere quel radicale col segno —, debba la $x$ esser maggiore della $a$; e quindi cadere il punto richiesto nella AB prolungata dal verso B, come C'.

Che se l'equazione di sopra espressa si fosse scritta nel seguente modo

$$\frac{(x-a)^2}{x^2}=\frac{n}{m}$$

il che non l'altera; da essa ne sarebbe risultato

$$\frac{x-a}{x}=\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$$

in cui al contrario si vede, che volendo prendere il radicale col segno +, debba la $x$ esser maggiore della $a$, e però cadere il punto richiesto nel prolungamento della AB, come in C'; e volendo prender quello col segno —, la $x$ debba esser minore della $a$, e 'l punto cercato cadere tra A, B, come in C.

363. Ed a stabilire sempre più la corrispondenza del grado dell'equazione ad un problema con la soluzione che esso può ricevere, osservisi che supponendo uguali le attività della luce de' corpi A, B, non possa aversi altro punto di uguale illuminazione di essi, che il solo medio della loro distanza AB, e però che il problema non possa ricevere se non una sola soluzione. E di fatti corrispondentemente in questo caso la prima equazione

$$\frac{m}{(a-x)^2}=\frac{n}{x^2}$$

diviene $\quad a-2ax=o$

cioè di 1° grado, dando per la $x$ il solo valore $\frac{1}{2}a$.

E per maggiormente render manifesto il fin qui esposto, suppongasi la distanza AB de' due corpi $= 100$ *palmi*, la $m = 4$, $n = 1$, cioè che la luce del corpo A sia d' intensità quadrupla di quella di B, si avrebbe $\frac{a}{m-n}\sqrt{mn} = 66\frac{2}{3}$ e toltone $\frac{na}{m-n} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$, risulterebbe la distanza $BC = 33\frac{1}{3}$, e però la $AC = 66\frac{1}{3}$. Quindi la luce del corpo A in C sarebbe espressa da $\frac{4}{(66\frac{2}{3})^2} = \frac{2^2}{2^2(33\frac{1}{3})^2}$ precisamente quanto quella del corpo B nello stesso punto C.

Al contrario l' altra radice negativa da corrispondere, come si è detto, al punto C', essendo espressa da $a\left(\frac{n+\sqrt{mn}}{m-n}\right)$ che nel caso presente diviene 100, e però $AC' = 200$. Sicchè l' attività della luce di B in C' si trova essere $\frac{1}{100^2}$, e quelle di A espressa da $\frac{4}{200^2} = \frac{2^2}{2^2.100^2} = \frac{1}{100^2}$, e però uguale alla prima.

E la stessa verifica avrebbe luogo nel caso che si fosse trattata l' analisi del problema nel secondo modo di sopra tenuto, cioè andando direttamente in cerca del punto C'.

361. A maggiormente comprovare l' assunto; poichè la presente equazione concede l' abbassamento al primo grado, potrà di leggieri vedersi come vi bisognerà separatamente ciascuna delle surriferite equazioni per avere la soluzione rappresentata in ciascun de' casi dalla sola radice positiva.

362. Prendasi di fatti la prima delle equazioni ottenute,

$$\frac{m}{(a-x)^2} = \frac{n}{x^2}$$

cioè

$$\frac{x^2}{(a-x^2)} = \frac{n}{m}$$

che estraendo la radice diviene

$$\frac{x}{a-x}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}},$$

e quindi $$x=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

ove sostituiti i valori in numeri diviene $x=\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$.

Al contrario dall' altra

$$\frac{m}{(a+x)^2}=\frac{n}{x^2}$$

cioè $$\frac{x^2}{(a+x)^2}=\frac{n}{m}$$

si ha $$\frac{x}{a+x}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

che, co' valori rispettivi di $a$, $m$, $n$ dà

$$x=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=100$$

il qual valore della AC′ risolve il problema per questo solo caso, cioè come se fosse stato proposto semplicemente per rinvenire il punto C′ nel prolungamento della AB, ove i corpi luminosi A, B di diverse forze diffondono la stessa luce.

363. Ed a rendere sempre più manifesta la corrispondenza del grado dell' equazione ad un problema con le soluzioni che esso può ricevere osservisi, che supponendo uguali le attività della luce de' corpi A, B, non possa aversi altro punto di uguale illuminazione di essi, che il solo medio della loro distanza AB, e però che il problema non possa ricevere se non una sola soluzione. E di fatti corrispondentemente in questo caso l' equazione

$$\frac{m}{(a-x)^2}=\frac{n}{x^2}$$

diviene $$a^2-2ax=0$$

cioè di 1° grado, dando per la $x$ il solo valore $\frac{1}{2}a$.

### Problema IV.

364. *Due contadine portano a vendere 100 uova nell' insieme; ma la prima ne ha più della seconda, e pure ne ricava ciascuno lo stesso denaro. Or la seconda dice alla prima, se avessi io avute le tue uova ne avrei cavate grana 45, e questa le risponde, se io avessi vendute le tue ne avrei tratto sol grana 20. Si vuol sapere quante uova portava ciascuna.*

*Soluzione.*

Pongasi essere $x$ il numero delle uova della prima; sarebbero $100-x$ quelle della seconda. Or questa se avesse vendute le uova della prima al prezzo delle sue ne avrebbe cavato grana 45. Adunque il prezzo di ciascun uovo per questa è stato $\frac{45}{x}$; ed al contrario il prezzo di ciascun uovo della prima sarebbe $\frac{20}{100-x}$; però tutte le uova della seconda hanno dovuto produrle il valore $\frac{45(100-x)}{2}$, mentre il prodotto di quelle della prima è stato $\frac{20x}{100-x}$; i quali valori dovendo essere uguali, produrranno la seguente equazione al problema

$$\frac{45(100-x)}{x}=\frac{20x}{100-x}$$

cioè $$45(100-x)^2=20x^2$$

o sia $$9(10000-200x+x^2)=4x^2$$

che risoluta darà per $x$ i due valori

$$x=60$$
$$x=300$$

365. Con l' una delle radici ottenute dal risolvere l' equa-

zione al precedente problema, cioè col numero 60, soddisfasi ad esso nel modo preciso come è stato enunciato; sicchè la prima delle contadine avrebbe portato al mercato 60 uova, vendendole ad un *mezzo grano*, e però la seconda 40 vendendole a $^3/_4$ di *grano*; il che dà per ciascuna, per prodotto della vendita, grana 30. E l' Eulero che recò un tal problema ne' suoi Elementi di Algebra al §. 654, a questa sola radice si attenne.

366. Ma rimane sempre a vedere cosa voglia significare l' altra radice 300, che sembra impropriissima; e perchè venga prodotta dal calcolo. A ciò deciferare basta riflettere, che il binomio$(100-x)^2$essendo identico all'altro$(x-100)^2$, l' equazione

$$45(100-x)^2=20x^2$$

ch' è quella esprimente le condizioni precise del problema proposto sia identica all' altra

$$45(x-100)^2=20x^2$$

che corrisponderebbe al problema enunciato nel seguente modo: *Due contadine portano a vendere al mercato l' una 100 uova più che l' altra, e ne ritraggono dalla vendita lo stesso denaro*: ed il resto come nell' enunciazione superiore. E dal maneggio dell' equazione notata pel problema così enunciato si otterrebbero le stesse radici 300 e 60, delle quali al contrario si vedrebbe chiaramente l' uso di quella espressa da 300, e rimarrebbesi come insignificante l' altra 60.

E ciò era necessario avvertire, per mostrar sempre più l' esatta corrispondenza tra la natura de' problemi, e la loro equazione caratteristica; e la necessità di dover ben considerare i risultamenti de' problemi per ispiegarne l' uso, che non sempre, sieno essi aritmetici o geometrici, mostrasi a prima vista.

367. Avvertasi ancora, che l' equazione ad un tal problema

potevа pure risolversi estraendo la radice quadrata da ambo i membri.

368. Vi sono de' casi ne' problemi aritmetici ne' quali la radice negativa conviene rigettarla ; ed è quando essi corrispondono a' problemi geometrici ove quella risulta dalla costruzione ; poichè in questi ha luogo il *sito* , che alle quantità aritmetiche assolute affatto non si appartiene.

Così proponendosi a ritrovare tra due numeri $a$ , $b$ il medio proporzionale geometrico, sarà esso dinotato da $\pm\sqrt{ab}$; ove trattandosi di numeri non potrà farsi uso che della sola radice positiva $+\sqrt{ab}$. Ma la soluzione algebrica essendo la stessa sì pe' dati aritmetici, che pe' geometrici, cioè sì pe' numeri , che per le rette, non poteva il risultamento per l' una esser diverso da quello per l' altra ; e però doveva apparirvi ancora la radice negativa , la quale nella costruzione geometrica del problema esprime l'un' ordinata del cerchio, con cui costruiscesi un tal problema , opposta all' altra.

Intanto di questo argomento può per ora bastare quanto se n' è detto , serbando il complemento di esso alle considerazioni su'problemi geometrici, delle quali è ampiamente trattato nell' *Invenzione geometrica* [35] , e nelle *dissertazioni* inserite nel vol. I. degli *Opuscoli matematici*.

E per dire anche qualche cosa delle radici *immaginarie*, che come si è veduto indicano l' impossibilità del quesito dipendente da' dati per la quantità loro , o dalle condizioni proposte , che nel primo caso può correggersi modificando quelli , e quindi aversi per un'*impossibilità relativa* , giacchè la grandezza de' dati non cambia il problema ; nell' altro caso modificando una condizione del probloma , nel qual caso cambiandosi il problema in un altro, l' *impossibilità* era *assoluta* pel proposto.

---

[35] Di questo trattato n' è stata già pubblicata la prima parte fin dal 1842.

Un esempio del primo caso l' offre il problema :

Dividere il numero $a$ in due parti, sicchè il loro prodotto pareggi $b$ :

Le cui radici, procedendo in risolverlo nel modo che si è tenuto nel problema II. ( 358. ), sono indicate da

$$\frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}$$

e però reali, e quindi possibile il problema finchè $4b^2 \leqq a^2$,

o sia $b \leqq \frac{a}{2}$, nel qual caso il prodotto delle parti del numero diventando *massimo* (5.*El. II.* ), si vede bene che al di là di tal supposizione il problema debba risultare *impossibile* ; il che viene indicato dal $\sqrt{(a^2 - 4b^2)}$, che diviene immaginario.

369. L' altro caso d' impossibilità assoluta potrà osservarsi nel seguente

### Problema V.

370. *Rinvenir due numeri, tali che la loro somma, il loro prodotto, e la somma de' loro quadrati sia la stessa.*

*Soluzione.*

Indicando con $x$, $y$ i richiesti numeri, si avranno le seguenti equazioni al problema

$$\begin{array}{ll} \text{I}^a & x + y = xy \\ \text{II}^a & x + y = x^2 + y^2 \end{array}$$

dalla I$^a$ delle quali presa l' espressione della $y$ nella $x$, e sostituendola nella II$^a$, si ha dopo le convenienti riduzioni

$$x^2 - 3x + 3 = o$$

che risoluta dà

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

e quindi

$$y = \frac{3 \mp \sqrt{-3}}{2}$$

i quali valori delle $x$, $y$, sebbene sembrino due per ognuna, pure non ne rappresentano che un solo, scambiandosi pel segno l' un valore dell' una incognita con quello dell' altra sempre contrario. E volendo di fatti verificare il problema co' seguenti valori di $x$, $y$, cioè

$$x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2} \quad , \quad y = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$$

si ha $$\frac{3+\sqrt{-3}}{2} + \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{3+\sqrt{-3}}{2} \times \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = \frac{9+3}{4} = 3$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{-3}+9-6\sqrt{-3}-6}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Da che si vede, che le espressioni algebriche ottenute soddisfino al problema, sebbene questo sia di sua natura impossibile. Imperocchè essendo

$$x^2 + y^2 = xy$$

si avrà, togliendo di comune $2xy$

$$x^2 - 2xy + y^2 = -xy$$

e quindi $$x - y = \pm \sqrt{-xy}$$

vale a dire la differenza tra due numeri che suppogonsi reali espressa da una quantità immaginaria.

In questo caso risultando l' impossibilità dalla condizione del problema sarebbesi potuta distruggere cambiando tal condizione nell' opposta, e cercando però che invece della somma $x^2 + y^2 = xy$ fosse la differenza $x^2 - y^2 = xy$. Nel

qual caso risolvendo il problema si sarebbero ottenuti per le $x$, $y$ i valori reali

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

co' quali presi o co'segni superiori, o con gl' inferiori si soddisfa al problema.

## CAPITOLO XI.

### Alcuni problemi aritmetici di secondo grado.

371. Per adempiere allo stesso scopo indicato nel principio del cap. VII. ( 309 ), recherò quì un numero di problemi del 2° grado, da' quali, come pur ivi mi proposi, cercherò trarre non solo rischiaramenti alle dottrine precedentemente esposte; ma ancora qualche nuova regola per più adeguatamente risolverli.

### Problema I.

372. *Si cerca un tal numero, che il prodotto di esso accresciuto di 5, per lo stesso minorato di 5 sia uguale a 96.*

*Soluzione.*

Sia $x$ il numero cercato: l' equazione al problema sarà

$$(x + 5)\ (x - 5) = 96$$

cioè
$$x^2 - 25 = 96$$
$$x^2 = 121$$
ed
$$x = \pm 11$$

Sicchè ad un tal problema soddisfa il numero $+ 11$. Di fatti essendo $11 + 5 = 16$, ed $11 - 5 = 6$, si trova che il prodotto $16 \times 6 = 96$.

E siccome la natura di un prodotto positivo è tale che esso può risultare anche da due numeri negativi per fattori (44); perciò l' equazione al problema doveva anche comprendere questo caso. Di fatti l'equazione ad esso risoluta ha dato l'altro numero $-11$, col quale si ha, per un de' fattori del prodotto 96, $-11 + 5 = -6$, e per l' altro $-11 - 5 = -16$.

### Problema II.

373. *Alcuni negozianti stabiliscono un agente per un loro commercio in società, con la condizione tra essi, che ciascun associato contribuisca tante volte 10 scudi, quant' è il loro numero. Il profitto dell' agente è fissato a due volte tanti scudi per 100, quanti sono gli associati; e moltiplicandosi la* $\frac{1}{100}$ *parte del suo guadagno totale per* $2\frac{2}{9}$ *ne risulterà il numero degli associati. Si dimanda qual sia un tal numero.*

*Soluzione.*

Sia questo numero $= x$; e poichè ciascun associato ha somministrato $10x$, il capitale intero sarà $= 10x^2$. Or per ogni 100 scudi l' agente guadagna $2x$; il suo profitto è dunque $\frac{1}{5}x^3$ pel capitale $10x^2$. La $\frac{1}{100}$ parte di questo guadagno è $\frac{1}{500}x^3$, che moltiplicato per $2\frac{2}{9}$, cioè per $\frac{20}{9}$, dà $\frac{20}{4500}x^3 = \frac{1}{225}x^3$, espressione che dovendo pareggiare il numero $x$ degli associati, si ha quindi l' equazione

$$\frac{1}{225}x^3 = x$$

ossia

$$x^3 = 225x$$

la quale sebbene sembri apparentemente del terzo grado; pure perchè si può dividere per $x$ si riduce subito ad

$$x^2 = 225$$

ed

$$x = \pm 15$$

374. La prima di queste radici cioè $+15$ soddisfa al problema, e dà il numero che cercavasi degli associati, ciascuno de' quali ha perciò contribuiti 150 scudi. L' altra $-15$ è un numero negativo, che soddisferebbe al problema, se fos-

### Problema IV.

364. *Due contadine portano a vendere 100 uova nell' insieme; ma la prima ne ha più della seconda; e pure ne ricavano lo stesso denaro. Or la seconda dice alla prima, se avessi io avute le tue uova ne avrei cavate grana 45, e questa le risponde se io avessi vendute le tue ne avrei tratte sol grana 20. Si vuol sapere quante uova aveva ciascuna.*

*Soluzione.*

Pongasi $x$ il numero delle uova della prima; sarebbero $100 - x$ quelle della seconda. Or questa se avesse vendute le uova della prima al prezzo delle sue ne avrebbe cavato grana 45. Adunque il prezzo di ciascun uovo per questa è stato $\frac{45}{x}$; ed al contrario il prezzo di ciascun uovo della prima sarebbe $\frac{20}{100 - x}$; e però tutte le uova della seconda hanno dovuto produrle il valore $\frac{45(100 - x)}{x}$, mentre il prodotto di quelle della prima è stato $\frac{20x}{100 - x}$; i quali valori essendo uguali produrranno la seguente equazione al problema

$$\frac{45(100 - x)}{x} = \frac{20x}{100 - x}$$

cioè

$$45(100 - x)^2 = 20x^2$$

o sia

$$9(10000 - 200x + x^2) = 4x^2$$

che risoluta darà per $x$ i due valori

$$x = 60$$

$$x = -300$$

Vale a dire che poteva la prima delle contadine aver portate 60 uova, e l' altra 40; o pure la prima averne portate 300, e la seconda 200, cambiando però la condizione di somma

100 delle uova in differenza 100 di esse. E di fatti sarà facile verificare il problema con que' due numeri, cioè con 60 uova e 40, o pure con 300 e 200, modificadone l'enunciazione nell' anzidetto modo.

365. Ed era necessario che ciò si avvertisse, da valere ancora in tanti altri casi; poichè da distinti analisti si suole in questi casi rigettare la radice negativa, come *inammissibile*, contraddicendo manifestamente ed alla natura del problema, ed a ciò che per la radice negativa ne' problemi aritmetici di 1° grado è stato stabilito, ed a' risultamenti esatti e generali che dà l' analisi algebrica: la qual cosa se era condonabile a' primi analisti italiani, che dissero *impossibili* le radici negative de' problemi, e però le rigettarono [14], non doveva affatto passarsi sotto silenzio nello stato attuale dell' Analisi algebrica. E deesi ancora avvertire, che per tal modo si verrebbe a stabilire una diversità tra i risultamenti geometrici de' problemi, che possonsi sempre costruire sieno positivi, sieno negativi, e quelli de' problemi aritmetici.

366. Ed avvertasi ancora, che l' equazione ad un tal problema poteva pure maneggiarsi come quella del problema precedente riducendola a

$$\frac{(100-x)^2}{x^2}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

dalla quale, estraendo la radice da ambo i membri avrebbesi

$$\frac{100-x}{x}=\frac{2}{3}$$

367. È noterò anche a questo proposito, che quando in problemi di simil fatta sembri difficile, o si trovi strano l'uso della radice negativa, e che convenga però rigettarla pel caso proposto, a ravvisarne la genuinità conviene dare al pro-

—

[14] Veggasi il *discorso preliminare*.

blema la forma generale ed astratta, da togliere al risultamento negativo quell' aspetto paradossale che sembra apparentemente avere.

Così nel caso presente, per non produrre altri esempi, il problema si avrebbe potnto trasformare nell' altro astratto :

*Dividere il numero 100 in due parti, tali che il quadrato dell' una stia a quello dell' altra come 45 a 20.*

Nel qual caso si vedrà la soluzione negativa corrispondere al problema affine di :

*Accrescere il numero 100 di tal quantità, sicchè il quadrato di questa stia a quello della medesima insieme col numero 100, come 20 a 45.*

O ancora enunciandoli complessivamente.

*Assegnare un numero, che sottratto o aggiunto a 100 dia tal differenza o somma, che il quadrato di questa stia a quello del numero cercato come 20 a 45.*

368. Vi sono però de' casi ne' problemi aritmetici ne' quali la radice negativa conviene rigettarla ; ed è quando essi corrispondono a' problemi geometrici ove quella risulta dalla costruzione ; poichè in questi ha luogo il *sito*, che alle quantità aritmetiche assolute affatto non si appartiene.

Così proponendosi a ritrovare tra due numeri $a$, $b$ il medio proporzionale geometrico, sarà esso dinotato da $\pm \sqrt{ab}$, ove trattandosi di nnmeri non potrà farsi uso che della sola radice positiva $+ ab$. Ma la soluzione algebrica essendo la stessa sì pe' dati aritmetici, che pe' geometrici, cioè sì pe' numeri, che per le rette, non poteva il risultamento per l' una esser diverso da quello per l' altra, e però doveva apparirvi ancora la radice negativa, la quale nella costruzione geometrica del problema esprime l' un ordinata del cerchio, con cui costrniscesi un tal problema, opposta all' altra.

Intanto di questo argomento può per ora bastare quanto se n'è detto, serbando il complemento di esso alle considerazioni su' problemi geometrici delle quali è ampiamente trat-

tato nell'*Invenzione geometrica* [35], e nelle *dissertazioni* inserite nel vol. I. degli *Opuscoli matematici*.

E per dire anche qualche cosa delle radici *immaginarie*, che come si è veduto indicano l'impossibilità del quesito dipendente da' dati, o dalle condizioni proposte, che nel primo caso può correggersi modificando quelli, e quindi aversi per un' *impossibilità relativa*, giacchè la grandezza de' dati non cambia il problema; nell' altro caso modificando una condizione del problema, nel qual caso cambiandosi il problema in un altro, l' *impossibilità* era *assoluta* pel proposto.

Un esempio del primo caso l' offre il problema: *Dividere il numero a in due parti, sicchè il loro prodotto sia* $b^2$, le cui radici, procedendo in risolverlo nel modo che si è tenuto nel problema II. (358.), sono indicate da

$$\frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4b^2)}}{2}$$

e però reali, e quindi possibile il problema finchè $4b^2 \leqq a^2$, o sia $b \leqq \frac{a}{2}$, nel qual caso il prodotto delle parti del numero diventando *massimo* (5. *El. II.*), si vede bene che al di là di tal supposizione il problema debba risultare *impossibile*; il che viene indicato dal $\sqrt{(a^2 - 4b^2)}$, che si fa immaginario.

369. L' altro caso d' impossibilità assoluta potrà osservarsi nel seguente

PROBLEMA V.

370. *Rinvenir due numeri, tali che la loro somma, il loro prodotto, e la somma de' loro quadrati sia la stessa.*

*Soluzione.*

Indicando con $x$, $y$ i richiesti numeri, si avranno le seguenti equazioni al problema

[35] Di questo trattato n'è stata già pubblicata la prima parte.

$$\text{I}^a \qquad x + y = xy$$
$$\text{II}^a \qquad x + y = x^2 + y^2$$

dalla I$^a$ delle quali presa l'espressione della $y$ nella $x$, e sostituendola nella II$^a$, si ha, dopo le convenienti riduzioni

$$x^2 - 3x + 3 = o$$

che risoluta dà

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

e quindi
$$y = \frac{3 \mp \sqrt{-3}}{2}$$

i quali valori delle $x$, $y$, sebbene sembrino due per ognuna, pure non ne rappresentano che un solo, scambiandosi pel segno l'un valore dell'una incognita con quello dell'altra sempre contrario. E volendo di fatti verificare il problema co' seguenti valori di $x$, $y$, cioè

$$x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2} \quad , \quad y = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$$

si ha
$$\frac{3+\sqrt{-3}}{2} + \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{3+\sqrt{-3}}{2} \times \frac{3-\sqrt{-3}}{2} = \frac{9+3}{4} = 3$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{-3}+9-6\sqrt{-3}-6}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Da che si vede, che le espressioni algebriche ottenute soddisfino al problema, sebbene questo sia di sua natura impossibile. Imperocchè essendo

$$x^2 + y^2 = xy$$

si avrà, togliendo di comune $2xy$

$$x^2 - 2xy + y^2 = -xy$$

e quindi
$$x - y = \pm \sqrt{-xy}$$

vale a dire la differenza tra due numeri che suppongonsi reali espressa da una quantità immaginaria.

In questo caso risultando l' impossibilità dalla condizione del problema sarebbesi potuta distruggere cambiando tal condizione nell' opposta, e cercando però che invece della somma $x^2 + y^2 = xy$ fosse la differenza $x^2 - y^2 = xy$. Nel qual caso risolvendo il problema si sarebbero ottenuti per le $x$, $y$ i valori reali

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

co' quali presi o co' segni superiori, o con gl' inferiori si soddisfa al problema.

## CAPITOLO XI.

### Alcuni problemi aritmetici di secondo grado.

371. Per adempiere allo stesso scopo indicato nel principio del cap. VII (309.), recherò quì un numero di problemi del 2° grado, da' quali, come pur ivi mi proposi, cercherò trarre non solo rischiaramenti alle dottrine precedentemente esposte; ma ancora qualche nuova regola per più adeguatamente risolverli.

### Problema I.

372. *Si cerca un tal numero, che il prodotto di esso accresciuto di 5, per lo stesso minorato di 5 sia uguale a 96.*

*Soluzione.*

Sia $x$ il numero cercato: l' equazione al problema sarà

$$(x+5)\ (x-5)=96$$

cioè

$$x^2-25=96$$

$$x^2=121$$

ed

$$x=\pm 11$$

Sicchè ad un tal problema soddisfa il numero $+11$. Di fatti essendo $11+5=16$, ed $11-5=6$, si trova che il prodotto $16\times 6=96$.

E siccome la natura di un prodotto positivo è tale, che esso può risultare anche da due numeri negativi per fattori (44); perciò l'equazione al problema doveva anche comprendere questo caso. Di fatti l' equazione ad esso risoluta ha dato l' altro numero $-11$, col quale si ha, per un de'fattori del prodotto 96, $-11+5=-6$ e per l' altro $-11-5=-16$.

### Problema II.

373. *Alcuni negozianti stabiliscono un agente per un loro commercio in società, con la condizione tra essi, che ciascun associato contribuisca tante volte 10 scudi, quant' è il loro numero. Il profitto dell' agente è fissato a due volte tanti scudi per 100, quanti sono gli associati; e moltiplicandosi la $\frac{1}{100}$ parte del suo guadagno totale per $2\frac{2}{9}$ ne risulterà il numero degli associati. Si dimanda qual sia un tal numero.*

### *Soluzione.*

Sia questo numero $= x$; e poichè ciascun associato ha somministrato $10x$, il capitale intero sarà $= 10x^2$. Or per ogni 100 scudi l' agente guadagna $2x$; il suo profitto è dunque $\frac{1}{5}x^3$ pel capitale $10x^2$. La $\frac{1}{100}$ parte di questo guadagno è $\frac{1}{500}x^3$, che moltiplicato per $2\frac{2}{9}$, cioè per $\frac{20}{9}$, dà $\frac{20}{4500}x^3 = \frac{1}{225}x^3$ espressione che dovendo pareggiare il numero $x$ degli associati. Si ha quindi l' equazione

$$\frac{1}{225}x^3 = x$$

ossia
$$x^3 = 225x$$
la quale sebbene sembri apparentemente del terzo grado; pure perchè si può dividere per $x$ si riduce subito ad

$$x^2 = 225$$

ed
$$x = \pm 15$$

374. La prima di queste radici cioè $+15$ soddisfa al problema, e dà il numero che cercavasi degli associati, ciascun de' quali ha perciò contribuiti 150 scudi. L' altra $-15$ è un numero negativo, che soddisferebbe al problema, se fos-

se stato proposto in numeri astratti; ma trattandosi di un numero di uomini associati, la radice — 15 niente significa, e quindi si trascura.

PROBLEMA III.

375. *Ritrovare due numeri la differenza de' quali sia $a$, e 'l prodotto $b^2$.*

*Soluzione.*

Sia $x$ il minore de' numeri cercati, l'altro di essi, il maggiore, verrà dinotato da $x+a$, e 'l loro prodotto da $x^2+ax$. Quindi l'equazione al presente problema sarà

$$x^2+ax=b^2$$

che risoluta (342.) dà

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$$

de' quali due valori della $x$ l'uno è positivo, l'altro negativo; ed il primo si vede chiaramente che soddisfi al problema, ma non ben si comprende l'uso dell'altro, che però pur soddisfa all'equazione d'onde deriva.

376. Per venire in chiaro di ciò, riflettasi che la supposizione fatta di $x$ come il minore de' numeri cercati è stata arbitraria, potendosi egualmente indicar con $x$ il maggiore di essi, nel qual caso l'equazione al problema sarebbe stata

$$x^2-ax=b^2$$

e la

$$x=\frac{a\pm\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$$

Or questi valori della $x$ sono identici a quelli ottenuti con la prima supposizione fatta di $x$ pel minore de' numeri cercati, ma inversamente presi; di tal che il primo di questi cioè $x=\frac{a+\sqrt{(a^2+4b^2)}}{2}$ è lo stesso che il secondo di quelli col segno cambiato; e similmente il secondo di questi corrisponde al primo di quelli col segno contrario. Si vede da

ciò che il secondo risultamento negativo nelle due soluzioni, non sia altro che la correzione della supposizione arbitraria già fatta nel cominciar la soluzione, indicando quel segno, che debbasi cambiar tal supposizione nella contraria; ed allora la quantità cui è proposto divien positiva, cioè soddisfa al problema presa col segno contrario a quello che risulta dall' equazione.

377. Quantunque dell' eliminazione tra equazioni composte debba trattarsi altrove a disteso, non ho stimato però sconvenevole recar quì qualche problema che conduca a siffatte equazioni, che l' eliminata di esse possa facilmente ottenersi con metodi particolari assai ingegnosi, e degni di essere attentamente considerati, tanto più che già si trova di ciò dato un esempio nel §. 370. Per tal modo i giovani si comminceranno di buon' ora ad aguzzare l' intendimento per gli artifizi di analisi, che convenevolmente adoperati possono con vantaggio guidarli alla ricerca de' valori dell' incognita.

## PROBLEMA IV.

378. *Ritrovare tre numeri, dati i tre quozienti che nascono da ciascun prodotto di due di essi diviso pel terzo.*

### *Soluzione.*

Sieno $a, b, c$ i tre quozienti dati, e s' indichino per $x, y, z$ i tre numeri cercati; avranno luogo le tre seguenti equazioni al problema

$$\text{I}^a \quad \frac{xy}{z} = a \quad , \quad \text{II}^a \quad \frac{xz}{y} = b \quad , \quad \text{III}^a \quad \frac{yz}{x} = c .$$

Dalle quali equazioni si avranno, moltiplicandole due a due, le altre tre seguenti,

$$\text{IV}^a \quad x^2 = ab \qquad \text{V}^a \quad y^2 = ac \qquad \text{VI}^a \quad z^2 = bc$$

$$\text{cioè} \quad x = \pm\sqrt{ab} \qquad y = \pm\sqrt{ac} \qquad z = \pm\sqrt{bc}$$

379. Sebbene veggansi i valori delle tre incognite contrassegnati dal doppio segno, è però chiaro, che volendo attenersi al richiesto nel problema, convenga dar loro il solo segno $+$; poichè non v' ha quantità assoluta negativa (25.). Che se però vogliasi più astrattamente considerar la cosa, e però tener conto eziandio del valor negativo di ciascun di tali numeri non possa mai prendersi ad un tratto il segno $-$ per essi; ma che debban due aver sempre lo stesso segno, sia positivo, sia negativo.

### Problema V.

380. *Ritrovar due numeri essendo data la somma de' loro quadrati, e 'l loro prodotto.*

### *Soluzione.*

Sia quel prodotto espresso da $b^2$, e da $a^2$ la somma de' quadrati de' numeri richiesti, che dinotinsi per $x$, $y$; si avranno le due condizioni del problema espresse dalle seguenti equazioni

I$^a$ $$x^2+y^2=a^2$$

II$^a$ $$xy=b^2$$

e però $$2xy=2b^2$$

equazione che sommata una volta, ed un' altra volta sottratta dalla I$^a$ darà le due altre III$^a$ e IV$^a$

III$^a$ $$x^2+2xy+y^2=a^2+2b^2$$

cioè $$(x+y)^2=a^2+2b^2$$

ed $$x+y=\pm\sqrt{(a^2+2b^2)}$$

IV$^a$ $$x^2-2xy+y^2=a^2-2b^2$$

cioè $$(x-y)^2=a^2-2b^2$$

ed $$x-y=\pm\sqrt{(a^2-2b^2)}$$

E sommando una volta le espressioni di $x+y$, $x-y$, ed

una volta sottraendo questa da quella si avrà finalmente

$$x = \frac{\pm \sqrt{(a^2 + 2b^2)} \pm \sqrt{(a^2 - 2b^2)}}{2}$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{(a^2 + 2b^2)} \mp \sqrt{(a^2 - 2b^2)}}{2}$$

che sono i nnmeri cercati. Ed essi, come vedesi, sono gli stessi per le $x$, $y$, ma con varia combinazione di segni, come doveva risultare; poichè non rilevandosi dalla soluzione del problema qual de' numeri s' indichi precisamente per $x$, quale per $y$, debbe il risultamento di esso esser tale da poter iscambiar l' uno nell' altro. Se non che, come si è detto,

prendendosi $x = \frac{+\sqrt{(a^2 + 2b^2)} + \sqrt{(a^2 - 2b^2)}}{2}$

deve risultare $y = \frac{+\sqrt{(a^2 + 2b^2)} - \sqrt{(a^2 - 2b^2)}}{2}$

e *viceversa*. Sicchè comprendesi, che sebbene vi appajano pel segno $+$ del primo radicale due valori per la $x$, e due per la $y$; essi non sono però che un solo per l' una, ed un solo per l' altra.

381. E similmente si vedrebbe scambiarsi l' uno per l'altro i valori della $x$ e della $y$, prendendo il segno $-$ del primo radicale, e combinandolo col segno $\pm$ del secondo. Nel qual caso però i numeri richiesti risultano negativi.

382. Che non possa poi combinarsi un de' primi valori della $x$ con uno de' secondi della $y$, si rileva dal vedere che risultando l' nn positivo l' altro negativo, il loro prodotto sarebbe negativo (45.), mentre si è supposto essere $+ b^2$.

383. E da queste considerazioni risulta confermata al presente problema la natura di 2° grado, ch' è quella che le appartiene.

PROBLEMA VI.

384. *Ritrovar due numeri, de' quali sia noto il prodotto, e la differenza de' loro quadrati.*

*Soluzione.*

Chiamando $a^2$ la differenza di que' quadrati, e $b^2$ il prodotto dato; le equazioni al problema saranno

I$^a$ $x^2 - y^2 = a^2$

II$^a$ $xy = b^2$

e moltiplicando i termini della seconda, per $2\sqrt{-1}$ [36], e poi sommandola alla prima, si avrà l' equazione

III$^a$ $x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{-1} = a^2 + 2b^2\sqrt{-1}$

cioè $(x + y\sqrt{-1})^2 = a^2 + 2b^2\sqrt{-1}$

ed $x + y\sqrt{-1} = \pm\sqrt{(a^2 + 2b^2\sqrt{-1})}$

Similmente si sottragga la II$^a$ equazione apparecchiata nel sopraddetto modo dalla I$^a$, si perverrà ad avere la

IV$^a$ $x - y\sqrt{-1} = \pm\sqrt{(a^2 - 2b^2\sqrt{-1})}$.

Adunque sommando una volta le equazioni III$^a$ e IV$^a$, ed un' altra volta sottraendo la IV$^a$ dalla III$^a$, e dividendo il primo risultamento per 2, e 'l secondo per $2\sqrt{-1}$, si avrà

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 + 2b^2\sqrt{-1})} + \sqrt{(a^2 - 2b^2\sqrt{-1})}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{(a^2 + 2b^2\sqrt{-1})} - \sqrt{(a^2 - 2b^2\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$$

E questi valori di $x, y$ sebbene in forma d' immaginari, sono però reali, come si rileva dal §. 216, e vi ha anche casi, ne'quali da ciascuno di que' binomi sotto il segno radicale si

[36] Un tal ripiego si presenta subito agli occhi di chiunque conosca la forma trinomia del quadrato di un binomio con un termine immaginario, come $x + y\sqrt{-1}$.

può estrarre la radice, come in appresso sarà mostrato.

385. Chiuderò il presente capitolo di esercitazione per le equazioni di secondo grado, con dimostrare la formola di Halley, di cui si è fatta parola nello scol. al §.213.

Volendo estrarre per approssimazione la radice $n$ dal binomio $x^n \pm a$, è chiaro che tal radice dovrà esser espressa da $x \pm p$ indicando $\pm p$ la quantità da accoppiarsi alla radice $n$ della $x^n$, allorchè questa quantità viene accresciuta, o diminuita di $a$.

Or essendo $x \pm p = \sqrt[n]{(x^n \pm a)}$

e quindi $(x \pm p)^n = x^n \pm a$

si avrà sviluppando la potenza $n$ (190.) del binomio $x \pm p$

$$x^n \pm nx^{n-1} p + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} p^2 \ldots\ldots\ldots = x^n \pm a$$

E supponendo la $p$ sì piccola, che si possano effettivamente trascurare tutt' i termini ove essa incontrasi a potenza superiore al quadrato [37], si avrà, cancellando l' $x^n$ ne' due membri della precedente equazione,

$$\pm nx^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} p^2 = \pm a$$

la quale equazione ordinata per rapporto a $p$ come incognita, sarà la seguente

$$p^2 \pm \frac{2px}{n-1} = \pm \frac{2a}{(n^2-n)x^{n-2}}$$

che risoluta darà

$$p = \frac{\mp x}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{(n-1)^2} \pm \frac{2a}{(n^2-n)x^{n-2}}\right)}$$

[37] Le quantità $1, p, p^2, p^3 \ldots p^n$ essendo in continua proporzione ne segue, che se $p$ sia piccolissima rispetto all' unità, debba esser $p^2$ piccolissima rispetto a $p$, $p^3$ rispetto a $p^2$, e così sempre per le successive potenze. Adunque si vede, che secondo un dato grado di approssimazione che si voglia, si possano trascurare nella formola dello sviluppo di $(x+p)^n$ le potenze di $p$ da un tal grado in avanti, come nel presente caso si è supposto dal secondo in poi.

ove si vede chiaramente, che i segni superiori debbano aver luogo allorchè nella formola proposta l' $a$ è positiva, gl' inferiori se negativa. E da ciò risulterà generalmente

$$\sqrt[n]{(x^n \pm a)} = \frac{n-2}{n-1}\,x + \sqrt{\left(\frac{x^2}{(n-1)^2} \pm \frac{2a}{(n^2-n)\,x^{n-2}}\right)}$$

nella qual formola il radicale che vi si comprende è quadratico, e di esso il primo termine è un quadrato perfetto, e 'l secondo è una frazione tanto più piccola, quanto più piccola da principio erasi stabilita l' $a$ in paragone della $x$.

386. L' Halley, nella sua *memoria* da noi citata nel §.213, non recò intorno al presente argomento che semplicemente alcune formole particolari, avendo a dirittura taciuta la formola generale soprindicata, dopo l' esposizione della quale sarà ben fatto dare quì appresso alcuna di quelle

$$\sqrt[3]{(x^3 \pm a)} = \frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} \pm \frac{a}{3x}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(x^4 \pm a)} = \frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{9} \pm \frac{a}{6x^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(x^5 \pm a)} = \frac{x}{4} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{16} \pm \frac{a}{10x^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(x^6 \pm a)} = \frac{x}{5} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{25} \pm \frac{a}{15x^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(x^7 \pm a)} = \frac{x}{6} + \sqrt{\left(\frac{x^2}{36} \pm \frac{a}{21x^5}\right)}$$

E sarà facile il procedere innanzi nella composizione di queste formole particolari, senza nè anche eseguire la sostituzione del valore di $n$ nella formola generale, rendendosi chiara la legge con cui procedono i termini di ciascuna formola particolare, ed i coefficienti de' medesimi; ove si avverta soltanto che quelli del secondo termine del binomio sotto al segno radicale sono la somma continuata de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, *ec.* fino a quello ch' è dinotato in ciascun caso da $n - 1$, cioè, come sarà detto in appresso, sono i numeri *triangolari*.

## CAPITOLO XII.

### Delle equazioni biquadratiche.

387. Def. xiv. Col nome di equazioni *biquadratiche* s' intende una specie la più elementare delle equazioni *derivative*, dette *proporzionali* da' primi geometri italiani[38], nella quale si perviene a risolverle mediante una doppia successiva estrazione di radice quadrata.

La loro forma è assolutamente analoga a quella del 2° grado, avendo tre soli termini, de' quali il primo tiene l' incognita al 4° grado, il secondo al 2° grado, con qualunque coefficiente, e 'l terzo l'è il termine noto, come la seguente

$$x^4 + px^2 + q = o.$$

388. Procedendo per tale equazione nel modo stesso che per quelle del secondo grado, cioè trasportando nel 2° membro la quantità nota $q$, e tentando l' estrazione di radice da $x^4 + px^2$ si vedrà, che a completare il quadrato di questo binomio manchi $\frac{p^2}{4}$, cioè il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine; e però aggiugnendo tal quantità a' due membri dell' equazione si avrà

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

ed $$x^2 + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

quindi $$x^2 = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} - q\right)}$$

e finalmente maneggiando quest' equazione come una *pura* di 2° grado si avrà

[38] Vedi il *discorso preliminare*.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}}\ ,$$ [19]

che potrà ancora variarsi facilmente ne' segni di $p$ e di $q$, secondo quelli che ne avevano le quantità note $p$, $q$ dell' equazione proposta. Ed avvertendo a questi, ed al valore di $4q$ relativamente a $p^2$ si potrà di leggieri definire i casi ne' quali i valori della $x$ risultino reali, o immaginari.

389. E primieramente il terzo termine $q$ dell' equazione proposta sia negativo, sicchè risulti positivo il $\sqrt{(p^2 + 4q)}$, è manifesto che la quantità $\pm p + \sqrt{(p^2 + 4q)}$ sarà sempre positiva, qualunque sia il segno di $p$; e però risultino reali i due valori corrispondenti della $x$ rappresentati da

$$\pm\sqrt{\frac{\pm p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}}$$

mentre al contrario prendendo come negativo il $\sqrt{(p^2 + 4q)}$ sotto al segno del primo $\sqrt{}$, le duo radici rappresentate da

$$\pm\sqrt{\frac{\pm p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}}$$

risulteranno immaginarie.

390. Che se la $q$ essendo positiva nel terzo termine dell' equazione, si trovi però negativa nel $\sqrt{(p^2 - 4q)}$, converrà in tal caso riguardare al valore di $4q$ relativamente a $p^2$; di tal che essendone minore, continueranno le radici ad essere come nel caso precedente; ove siagli uguale, le quattro radici si ridurranno a quelle risultanti da

$$\pm\sqrt{\pm\frac{p}{2}}$$

e però due di esse rappresentate da

$$+\sqrt{+\frac{p}{2}}\ ,\ \text{o da}\ +\sqrt{-\frac{p}{2}}$$

due altre da $-\sqrt{+\frac{p}{2}}$, o da $-\sqrt{-\frac{p}{2}}$

[19] Questa specie di radicali, che ne comprendono altri sotto del *segno* $\sqrt{}$, come $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$, $\sqrt{(a \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{\sqrt{c}})}$... dicevansi da' primi analisti italiani *universali*, o *legati*; la qual prima denominazione ancora ritengono.

e quindi o tutte quattro reali, o tutte quattro immaginarie, secondo che $\frac{p}{2}$ sia positiva o negativa, cioè il coefficiente $p$ del secondo termine dell' equazione proposta negativo o positivo; ed esse sempre uguali a due a due, e di segno contrario.

391. Ed in questo caso è ancor chiaro che l' equazione

$$x^4 \pm px^2 + q = o$$

riducasi ad

$$x^4 \pm px^2 + \frac{p^2}{4} = o$$

ove il trinomio rappresentante il 1° membro essendo un quadrato perfetto, non v' ha bisogno di alcuna preparazione per pervenirsi con l' estrazion di radice all' equazione

$$x^2 \pm \frac{p}{2} = o$$

dalla quale si ha

$$x = \pm \sqrt{\mp \frac{p}{2}}$$

392. Finalmente se $4q > p^2$, risultando immaginario il $\sqrt{(p^2 - 4q)}$ le quattro radici della proposta saranno tutte quattro immaginarie

393. Ritornando ora al caso di $\sqrt{(p^2 - 4q)}$ reale, si vede, che il

$$\sqrt{\frac{+ p \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}}$$

risulti reale, in tutt' i due casi, mentre l' altro

$$\sqrt{\frac{- p \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}}$$

sia, in tutt' i due casi, immaginario. E si vede ancora (tenendo conto del duplice segno che precede il radicale universale) che ciascuna radice reale o immaginaria ne tragga seco un' altra eguale e di contrario segno.

394. La risoluzione delle equazioni derivative suddette suolesi anche effettuare nel seguente modo analogo al già recato ; ma che indicheremo, poichè uniforme al modo di risoluzione che in appresso dovremo tenere per tutte le equazioni derivative.

395. Sia l' equazione

$$x^4 + px^2 - q = o$$

e s' indichi la $x^2$ per $y$, si avrà la $x^4$ espressa da $y^2$, e però con la sostituzione di $y^2$, $y$ invece di $x^4$, $x^2$ nella proposta, essa prenderà assolutamente la forma delle equazioni di 2° grado, cioè

$$y^2 + py - q = o$$

che risoluta (342.) darà

$$y = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

ove riponendo la $x^2$ invece della $y$ si avrà l' equazione pura del 2° grado

$$x^2 = \frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

dalla quale per l' estrazion di radice si ha

$$x = \pm \sqrt{\frac{-p \pm \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}}$$

in cui la combinazione de' doppi segni potendo eseguirsi in quattro diversi modi si verranno però ad avere per la $x$ quattro diversi valori, ciascun de' quali potrà soddisfare all' equazione proposta.

396. È facile vedere, che prendendosi per valori della $x$ i due col segno + del secondo radicale, e moltiplicandoli tra loro si abbia

$$\frac{+p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

e facendo lo stesso per gli altri due col segno — di quel

radicale risulti

$$\frac{+p+\sqrt{(p^2+4q)}}{2}$$

e che dalla somma di questi due prodotti risulti $+p$, dal loro prodotto $-q$, cioè, che:

*La somma del prodotto delle radici ottenute per l' equazione $x^4+px^2-q=o$, a due a due, prese nel modo indicato, affinchè in tutt' i casi questo risulti reale, si ha il coefficiente p del termine ov' è la $x^2$; e dal prodotto di tutti e quattro ottiensi il termine noto $q$.*

Il che si vedrà in appresso consentire con quello che dimostreremo su tal proposito per le equazioni in generale.

397. I seguenti problemi mentre serviranno di convenevole esercizio della teorica esposta, continueranno a diffondere maggior luce sulla natura de' problemi, ch' è lo più importante argomento dell' *Analisi algebrica*.

### Problema I.

398. *Si vogliono due numeri quadrati, la cui somma sia 5, e 'l prodotto 4.*

*Soluzione.*

Dinotandone l' uno per $x^2$, l' altro sarà $5-x^2$, e 'l loro prodottu $5x^2-x^4$, che darà luogo all' equazione

$$x^4-5x^2+4=o$$

la quale risoluta darà

$$x=\pm\sqrt{\frac{5\pm3}{2}}$$

dalla quale espressione, combinando i doppi segni ne' quattro modi diversi, si ha

$$x=2\quad,\quad x=-2\quad,\quad x=1\quad,\quad x=-1$$

ciascuna delle quali radici soddisfa all' equazione, ed al problema, dando pe' numeri richiesti 1 e 4. E si vede però che

possa il medesimo ricevere quattro diverse soluzioni, corrispondenti nel numero al grado della sna equazione.

399. Che se l'equazione a maneggiare fosse stata

$$x^4 + 5x^2 + 4 = o$$

la $x$ sarebbe risultata espressa nelle quattro forme diverse
$x = 2\sqrt{-1}$, $x = -2\sqrt{-1}$, $x = \sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$
ciascuna delle quali essendo immaginaria, avrebbe indicata l'impossibilità del problema cui corrispondeva quell'equazione.

Di fatti un tal problema sarebbe stato il seguente:

*Rinvenire due numeri quadrati, la cui somma fosse — 5, e 'l prodotto 4.*

la cui impossibilità è manifesta, mentre non v' ha numeri i cui quadrati possano risultar negativi (44.), e dare però luogo ad una somma negativa.

Da che rimane ancora confermato il già detto ne' §§. 368, e 370, per la trasmutazione delle radici immaginarie di un problema in reali, con l'inversione di qualche condizione; come di fatti nel presente, invertendosi la somma — 5, nell' altra + 5.

400. E risolvendo il seguente analogo problema:

*Rinvenire due numeri quadrati la differenza de' quali sia 5, e 'l prodotto 14.*

L'equazione ad esso sarebbe stata

$$x^4 + 5x^2 - 14 = o$$

ed i valori della $x$ i seguenti

$$x = \pm\sqrt{2} \quad , \quad x = \pm\sqrt{-7}$$

due de' qnali essendo reali, indicano la possibilità del problema, e ne danno le soluzioni corrispondenti; due altri essendo immaginari ne dinotano l'impossibilità; e pare che stabiliscano una contraddizione co' primi.

401. A togliere questa difficoltà, nel presente caso, convien rammentarsi ciò che fu detto nel §. 143, circa la natura del-

la quantità immaginaria, che fu riposta nell' impossibilità dell' operazione che si voleva eseguire sulla quantità reale che vi dava luogo; di tal che un' operazione contraria valeva a restituire la quantità reale. Or è noto che può benissimo un quadrato reale nascere ancora da una radice immaginaria; e nel problema presente trattasi de' quadrati de' numeri che si cercano, e non di essi numeri. Adunque era conveniente che l' equazione al problema, la quale dee dar quelli, e non questi esibisse non solamente i due valori reali che potevan loro corrispondere, ma ancora le due espressioni immaginarie, che davano anche luogo a quadrati reali. E con un simile ragionamento, convenevolmente fatto, si potrà trovar via a deciferare lo stesso in casi analoghi di altri problemi.

### Problema II.

402. *Ritrovar due numeri il cui prodotto sia $b^2$, ed $a^2$ la somma de' loro quadrati* [40].

### *Soluzione.*

Dinotando l' un numero per $x$, l' altro verrà espresso da $\frac{b^2}{x}$, e per l' altra condizione del problema avrassi

$$x^2 + \frac{b^4}{x^2} = a^2$$

cioè
$$x^4 - a^2 x^2 + b^4 = o$$

d' onde si ricava

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}$$

i quali quattro valori della $x$ risulteranno reali o immagina-

[40] Lo stesso che il problema 5. del cap. prec

ri, secondo che sia tale $\sqrt{(a^4 - 4b^4)}$, cioè $4b^4 \lesseqgtr a^4$, o sia $2b^2 \lesseqgtr a^2$.

403. Senza ritornar sulle stesse cose già dette ne' §§.380. e 381, accenneremo che i valori della $y$ sieno compresi nella medesima formola che dà quelli della $x$, senza esser bisogno di determinarli per mezzo dell' equazione $y = \frac{b^2}{x}$; e solamente con la permutazione di segni in que' §§. indicata: sicchè la presente soluzione sebbene sembri offrire quattro valori diversi per la $x$, non ne dà realmente che due, permutando tra loro i numeri $x, y$. E per riguardo alle combinazioni in cui questi risultano l' un negativo l' altro positivo si vede non doverne far uso, nè corrispondere esse al problema, non potendo dalle medesime ottenersi il prodotto $b^2$ positivo come si è supposto.

404. Nel modo stesso risolvendosi l' altro problema analogo già trattato nel §.384, si avrebbe

$$x = \pm \sqrt{\frac{-a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 4b^4)}}{2}}$$

sulla quale formola posson farsi le stesse precedenti considerazioni.

405. Questi due problemi sonosi qui di nuovo recati non solo per esercizio nel maneggio delle equazioni biquadratiche, e per sempre più comprovare l'immutabilità di natura de' problemi nella corrispondenza tra 'l numero delle soluzioni, e 'l grado dell' equazione cui perviensi, ed in oltre per mostrare che in taluni casi se questa alla natura del problema non sembra corrispondere, ciò è effetto del non proprio ripiego dall' analista preso in trattarlo: ma ancora perchè de' risultamenti di essi dovremo utilmente valerci nel capitolo seguente.

# CAPITOLO XIII.

## Dell' estrazione di radice da' binomi.

406. Def. xv. Con la denominazione di *binomio* intendesi ordinariamente dagli analisti, ogni espressione (52.) composta da due termini, l' un de' quali almeno sia *radicale* [41].

E quì più specialmente trattasi di quelli a radicali quadratici, e però della forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $a \pm b\sqrt{-1}$, $\sqrt{a} \pm b\sqrt{-1}$, da' quali si voglia estrarre la *radice quadratica*.

407. L' occasione di anticipar quì questa parte di trattazione, che dovrà in appresso esser generalmente esposta, l' ha porta lo scioglimento delle equazioni *biquadratiche*, essendosi veduto dar esso sempre luogo ad estrarre la radice quadratica da un de' binomi sopraddetti, il quale in alcuni casi può essere il quadrato perfetto di un altro binomio. E di fatti lo stesso problema risoluto in un modo nel §. 402.

ha dato la $$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 - 4b^4)}}{2}}$$

mentre con la soluzione del §. 380. si era ottenuto

$$x = \frac{+\sqrt{(a^2 + 2b^2)} \pm \sqrt{(a^2 - 2b^2)}}{2}$$

e questi valori della $x$ dovendo essere identici a' primi, debbono necessariamente essere ciascun di loro la radice quadrata del corrispondente binomio esistente sotto al segno *radicale universale* de' primi. La qual cosa potrà ciascuno verificare elevando a quadrato questa seconda quantità, da che risulterà l' espressione esistente sotto al segno $\sqrt{}$ *universale* della prima.

E potrà anche ciò intendersi dal vedere, che il quadrato di un binomio di cui un termine o ancor entrambi sieno affetti

[41] Vedi not. 18 al *disc. prelim.*

del segno $\sqrt{}$ risulti sempre espresso da due parti, l' una *razionale*, l' altra *irrazionale*.

408. Adunque si vede, che se mai $a \pm \sqrt{b}$ sia un quadrato perfetto, la sua radice debbe generalmente avere la forma $\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$; e però tutta la presente ricerca riducesi ad assegnare una regola da conoscere se $a \pm \sqrt{b}$ sia un quadrato perfetto, ed essendolo, come esibirne la radice, che per la forma più generale s' indichi per $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

409. Or supponendo che sia

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

si avrà
$$a \pm \sqrt{b} = x \pm 2\sqrt{xy} + y$$

il qual pareggiamento non può aver luogo se non sia separatamente
$$a = x + y$$
$$\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$$

poichè in qualunque altro modo si eseguisse, avrebbesi una quantità irrazionale espressa da quantità razionali, ossia che quella perderebbe la sua incommensurabilità.

Essendo dunque
$$a = x + y$$
$$\sqrt{b} = 2\sqrt{xy}$$

e quindi
$$b = 4xy$$

si avrà
$$x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - b)}}{2} \; [4]$$
$$y = \frac{a - \sqrt{(a^2 - b)}}{2}$$

e però affinchè le $x$, $y$ risultino razionali conviene che $\sqrt{(a^2 - b)}$ sia un quadrato perfetto, la cui radice essendo $h$,

sarà
$$x = \frac{a + h}{2} = m$$
$$y = \frac{a - h}{2} = n$$

[4] Nell' assegnar questi due valori si è preso il solo segno $+$ del radicale; poichè adoperandosi l' altro $-$ essi risulterebbero gli stessi, solamente invertendosi.

e quindi risulterà

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}.$$

Laonde per conoscere se il binomio $a \pm \sqrt{b}$ sia un quadrato perfetto, e per assegnarne la radice si avrà la seguente

## REGOLA.

410. *Si sottragga il quadrato del termine irrazionale del binomio da quello dell' altro razionale, se il residuo risulti un quadrato perfetto, l' espressione proposta l' è ancor essa. E da questo quadrato estratta la radice, si aggiunga e si tolga dal termine razionale del binomio; le radici della metà di tal somma, e differenza saranno i termini della radice richiesta.*

411. Ad illustrare una tal regola addurremo i seguenti

### Esempi.

I° *Si vuol conoscere se sia un quadrato perfetto il binomio*

$$2 + \sqrt{3}$$

*e qual ne sia la radice.*

Essendo $a = 2$, $b = 3$, sarà $a^2 - b = 1$, ch'è un numero quadrato, la cui radice è $1 = h$, e però l' estrazione di radice da quel biuomio può ottenersi; e l'una delle parti di questa sarà espressa da $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, l'altra da $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$;

ond' è che tal radice sarà

$$\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

II° *Vogliasi la radice di* $1 + 4\sqrt{-3}$.

Fatto lo stesso confronto di poc'anzi, si avrà $a^2 - b = 49$ e però $\sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$, e $\sqrt{y} = \sqrt{-3}$. Laonde la radice cercata sarà $2 + \sqrt{-3}$

come potrà verificarsi eseguendone il quadrato.

III° *Il binomio di cui vuolsi la radice sia*

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Sarà $a^2 - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, e però $h = 1$, e la radice richiesta risulterà $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

412. Siccome da un binomio della forma

$$x + y\sqrt{-1}$$

elevandolo a quadrato dee risnltarne un prodotto co'termini razionali di contrario segno, cioè $x^2$ e $-y^2$, così avvenendo che questi sieno uguali, e però si distruggano, quel quadrato si troverà in tal caso espresso da un solo monomio immaginario. Adunque potrà ancor talvolta saggiarsi se un monomio di questa fatta sia nn quadrato perfetto, e qual ne sia la radice binomia, adoperandovi la stessa regola di sopra esposta, sol che snppongasi *zero* la parte razionale del binomio generale al quale quello si paragona.

Sia di fatti $2\sqrt{-1}$ il monomio proposto; sarà $a = 0$, $b = -4$, e però $a^2 - b = 4$, il qual numero essendo un quadrato, ne dinota che il sia ancora $2\sqrt{-1}$. Ed in oltre essendo $h = \sqrt{4} = 2$, sarà $\sqrt{x} = 1$, e $\sqrt{y} = \sqrt{-1}$. Adunque la radice richiesta è

$$1 + \sqrt{-1}$$

come potrà verificarsi eseguendone il quadrato

## CAPITOLO XIV.

### Della proporzione e progressione aritmetica.

413. Def. xvi. La differenza tra due quantità si dice ordinariamente *ragione aritmetica*, che sarebbe ancor meglio detta *per differenza*; e tal differenza si dice ancora *esponente* della ragione aritmetica.

414. Def. xvii. Che se due quantità abbiano tra loro la stessa differenza che due altre, cioè che l' *esponente* della *ragione aritmetica* delle prime sia quanto quello delle seconde, le due ragioni aritmetiche saranno uguali, e tra le quattro quantità vi sarà *proporzione aritmetica*.

Così le due ragioni di $a : a \pm d$, e di $b : b \pm d$ sono uguali, e tra esse v' ha la proporzione aritmetica che si costuma esprimere nel seguente modo

$$a : a \pm d \cdot\!\cdot\!\cdot\; b : b \pm d.$$

415. E nel caso che $b$ pareggiasse $a \pm d$, e quindi $b \pm d$ divenisse $a \pm 2d$, la proporzione aritmetica sarebbe *continua*, e si noterebbe nel seguente modo

$$\cdot\!\cdot\!\cdot\; a : a \pm d : a \pm 2d.$$

416. È facile accorgersi dalla precedente definizione, che se i termini di una ragione aritmetica si accrescano, o si minorino di una stessa quantità la ragione non si alteri; poichè la differenza de' nuovi termini si conserva la stessa di prima. E che moltiplicandoli o dividendoli per una stessa quantità la ragione diventi quel moltiplice, o quella parte della proposta dinotata da tal quantità.

Di fatti sia la ragione di

$$a : a \pm d$$

moltiplicandone i termini per $n$ si ha l' altra

$$na : na \pm nd$$

il cui esponente è $nd$, ch' è il moltiplice $n$ dell' esponente $d$ della prima ragione. E dividendo que' termini per $n$ si sarebbe avuta l' altra ragione di $\frac{a}{n} : \frac{a}{n} \pm \frac{d}{n}$, ove l' esponente $\frac{d}{n}$ è la parte $\frac{d}{n}$ di $d$.

417. Dovendo una qualunque proporzione aritmetica essere indicata, come sopra, da

$$a : a \pm d \cdot\!\cdot\!\cdot\, b : b \pm d$$

risulta intuitivamente esser la stessa la somma che si ottiene da' termini estremi, che quella risultante da' termini medii, venendo sì l' una che l' altra dinotata da

$$a + b \pm d$$

E però: *da tre termini di una proporzione aritmetica si otterrà il quarto, sommando il secondo col terzo, e sottraendone il primo*, o pure, essendo continua, *togliendo il primo dal doppio del secondo*.

E: *dati i termini estremi di una proporzione aritmetica continua, si otterrà da essi il medio, sommandoli, e prendendone la metà*.

418. Def. xviii. Se ad una data quantità si aggiunga, o si tolga continuamente una stessa quantità, le somme o differenze successive costituiranno una seguela di termini aventi sempre la stessa ragione aritmetica, che dicesi *progressione aritmetica*, o *per differenza*; ed essa nel primo caso si dirà *crescente*, nel secondo *decrescente*.

Tal sarebbe, per esempio,

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d$. . . . . . . . . . . . . .

419. Ed è chiaro che la quantità la quale continuamente si aggiugne, o toglie, cominciando ad aver luogo dal secondo termine in poi, dovrà dopo il numero $n$ termini essere stata aggiunta o sottratta dal primo termine $n - 1$ *volte*; e però il termine $n$ di una progressione aritmetica di cui il pri-

mo sia $a$, e la differenza $d$, dovrà risultare espresso da

$$\text{I.}\qquad t = a \pm (n - 1)\, d$$

indicando con $t$ generalmente un tal termine [43].

420. Si vede, in oltre, che: *due termini prossimi di una progressione aritmetica debbano costituir proporzione con due altri qualunque anche prossimi* (414). Ed estendendo ciò, che: *due termini di una progressione aritmetica, tra' quali frammezzino uno stesso numero di termini, debbano costituire proporzione aritmetica con due altri termini tra'quali sia pure interposto lo stesso numero di termini che tra' primi*. Poichè tante volte si è dovuto aggiugnere o togliere alprimo de'primi la differenza, per ottenere il conseguente della prima ragione, quante volte conviene aggiugnere o togliere la stessa differenza dal primo de' secondi, per passare al suo conseguente.

421. Ciò posto: *vi sarà proporzione aritmetica tra il primo e secondo termine di una progressione, e il penultimo ed ultimo, ed in generale tra i termini estremi di una progressione aritmetica, e due qualunque equidistanti da essi.*

422. Adunque se il numero de'termini sia $n$, e però essendo il primo dinotato da $a$, l'ultimo il sia da $a + (n - 1)\, d$, la somma $2a \pm (n-1)d$ di questi sarà quanto quella di due qualsivogliano altri termini della progressione equidistanti da essi. E se il numero $n$ fosse impari una tal somma si vedrebbe pareggiare il doppio del termine medio. Di fatti questo dovendo risultare espresso da $a + \frac{(n-1)}{2}\, d$, prendendone il doppio si ha $2a + (n - 1)d$. Laonde essendo lo stesso il sommare il primo e l' ultimo termine della serie, che due qua-

—

[43] In appresso prenderemo sempre la $d$ col segno $+$, cioè la progressione come *crescente*; poichè non solo è manifesta la trasmutazione di segno nelle formole che recheremo, nel caso di $-d$, cioè che la progressione fosse *decrescente*; ma in questo caso si può adoperare la stessa formola, intendendo invertita la progressione, e preso per primo termine l' ultimo, e per ultimo il primo.

lunque equidistanti da essi, e tali somme, considerando il medio preso due volte nel caso di $n$ impari, essendo al numero $\frac{n}{2}$, risulta, che: *la somma di tutt' i termini della progressione di cui il primo termine sia $a$, l' ultimo venghi espresso da $t$, e 'l numero de' termini da $n$ debba essere dinotata da*

$$\text{II.} \qquad s = (a + t)\frac{n}{2}\ .$$

423. Or le due relazioni poc' anzi ottenute, ne' §§. 419 e 422, tra le cinque quantità $a$, $d$, $t$, $n$, $s$, cioè primo termine $a$ della progressione, differenza $d$, ultimo termine $t$, numero di essi $n$, e somma loro $s$, sono bastanti a determinarne due, date che siene le tre altre.

Di fatti dalla I. si ha $t$, dati $a$, $n$, $d$ [1][44]

e si avrebbe da $t$, $n$, $d$ [2]

$$\text{III.} \qquad a = t - (n - 1)d$$

da $a$, $t$, $n$ [3]

$$\text{IV.} \qquad d = \frac{t - a}{n - 1}$$

da $t$, $a$, $d$ [4]

$$\text{V.} \qquad n = \frac{t - a + d}{d}$$

Dalla II. si ha $s$ dati $a$, $t$, $n$ [3]

Ed in oltre da $s$, $t$, $n$ [5]

$$\text{VI.} \qquad a = \frac{2s}{n} - t$$

da $a$, $s$, $n$ [6]

$$\text{VII.} \qquad t = \frac{2s}{n} - a$$

da $a$, $s$, $t$ [7]

$$\text{VIII.} \qquad n = \frac{2s}{a + t}$$

[44] Con gli stessi numeri arabi messi ne' vincoli sono indicati i due elementi derivanti dalla medesima combinazione ternaria de' cinque elementi.

E da queste combinate con le prime quattro ne derivano le seguenti altre formole, cioè dalla combinazione della I. con la VI. si ha

da $s, n, d$ [8]

IX. $t = \frac{s}{n} + \frac{n-1}{2} d$

da $t, n, d$ [2]

X. $s = nt - \frac{n(n-1)}{2} d$

da $s, t, n$ [5]

XI. $d = \frac{2(nt-s)}{n(n-1)}$

da $d, t, s$ [9]

XII. $n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right)}$

Combinando la I. con la VII. si ha

da $s, n, d$ [8]

XIII. $a = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2} d$

da $a, s, n$ [6]

XIV. $d = \frac{2(s-na)}{n(n-1)}$

da $a, n, d$ [1]

XV. $s = na + \frac{n(n-1)}{2} d$

da $a, d, s$ [10]

XVI. $n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2 + \frac{2s}{d}\right)}$

e dalla I. combinata con l' VIII., si ha

da $t, a, d$ [4]

XVII. $s = \frac{t^2 - a^2}{2d} + \frac{t+a}{2}$

da $a, s, t$ [7]

XVIII. $d = \dfrac{t^2 - a^2}{2s - (t + a)}$

da $d, t, s$ [9]

XIX. $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(t^2 + d\left(t - 2s + \frac{1}{4}d\right)\right)}$

da $a, d, s$ [10]

XX. $t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{\left(a^2 - d\left(\frac{1}{4}d - a + 2s\right)\right)}$

424. E sono queste tutte le formole per la determinazione di due elementi da' tre dati, che posson risultare combinando a tre a tre i cinque elementi sopraddetti (423.), il che com' è noto, può ottenersi in dieci modi differenti (180.).

425. Dalle formole quassu recate possonsi ricavare de' teoremi utili e speciosi, de' quali ne recheremo alcuno per manuduzione a' giovani.

426. Così dalla formola

$$s = na + \frac{n(n-1)}{2}d$$

nel caso di $a \quad 1$, $d = 1$ si ha

$$s = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$2s = n^2 + n$$

e compiendo il quadrato del secondo membro con l' aggiunzione di $\frac{1}{4}$, sarà

$$2s + \frac{1}{4} = n^2 + n + \frac{1}{4}$$

o sia $8s + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$

Sicchè $8s + 1$ dee sempre risultare un quadrato perfetto, la cui radice è il doppio de' termini della serie più 1. Vale a dire che:

*La somma di un numero qualunque di termini della progressione naturale a contar dal primo, presa 8 volte, ed accre-*

*sciuto un tal prodotto di 1, è un quadrato perfetto, la cui radice è precisamente il doppio del numero de' termini della serie accresciuto di 1.*

427. E se continuando ad essere $a = 1$, sia $d = 2$, quella formole divenendo $s = n^2$ indicherà, che:

*La somma di un qualunque numero di termini della progressione a differenza 2, a cominciar da 1, è sempre un numero quadrato, la cui radice è indicata dal numero de' termini che si sommano.*

428. E siccome quella serie vien costituita da' numeri impari dall' unità, ne segue, che:

*Ciascun numero quadrato è sempre divisibile in tanti numeri impari, a cominciar da 1, quante sono le unità della sua radice.*

429. I seguenti problemetti basteranno a mostrare una qualche applicazione delle precedenti formole, lasciando a' giovani matematici l' esercitarsi in altri dipendenti dalle altre formole, che sono facili a congegnarsi, ed a risolversi.

## Problema I.

430. *L' oriuolo all' Europea suona per ogni ora, da 1 a 12, il numero che l' indica; si dimanda il numero de' tocchi dati per tutte le 12 ore.*

### *Soluzione.*

È chiaro che sien dati il primo termine 1 della progressione aritmetica de' numeri naturali fino a 12; e però la formola II. darà la quantità che cercasi

$$s = (a + t)\frac{n}{2} = (1 + 12)\times 6 = 78$$

O pure essendo ancor nota la differenza 1 de' termini di tal progressione; la formola XV. darebbe

$$s = na + \frac{n(n-1)d}{2} = 12 + \frac{132}{2} = 78$$

O ancora la XVII. darebbe

$$s = \frac{t^2 - a^2}{2d} + \frac{t+a}{2} = \frac{143}{2} + \frac{13}{2} = 78$$

Ma di esse, come vedesi, va meglio adoperata la formola II.

### Problema II.

431. *Un buon padre di famiglia cui è nata una fanciulla vuole stabilirle una dote di duc. 4000 al 18° anno, ed avendo in pronto duc. 1000 cerca sapere di quanto dee accrescerli in ciascun anno.*

### *Soluzione.*

Questo problema può risolversi per la formola IV, ponendo $a = 1000$, $n = 18$, $t = 4000$, che darà

$$d = \frac{4000 - 1000}{17} = \frac{3000}{17} = 176{,}47\,\frac{1}{17}.$$

### Problema III.

432. *Un pio uomo volendo distribuire una somma di ducati 320. a diversi poveri trova che dando al primo un ducato, 3 al secondo, 5 al terzo, e così sempre aumentando di due ducati l' elemosina fatta al precedente, gli sono mancati ducati 4; si domanda il numero de' poveri.*

### *Soluzione.*

La formola XIX, in cui nel caso presente $a = 1$, $d = 2$, $s = 324$, diviene

$$n = \sqrt{\frac{2s}{d}} = \sqrt{324} = 18$$

Eran dunque 18 i poveri cui si è fatto la detta elemosina.

PROBLEMA IV.

433. *Si vuole inserire tra due numeri dati 6 e 24 cinque medii aritmeticamente proporzionali.*

*Soluzione.*

Il proposto problema equivale a trovare la differenza $d$ di una serie di 7 termini, de' quali il primo sia 6, l' ultimo 24, e però la formola IV. darà subito

$$d=\frac{24-6}{7-1}=3\,.$$

E la progressione risultante sarà

6, 9, 12, 15, 18, 21, 24.

## CAPITOLO XV.

### De' numeri figurati.

434. Def. xviii. Diconsi numeri *figurati* quelli le cui unità possonsi concepir disposte in modo da rappresentare una figura geometrica piana o solida a lati uguali.

Di tali numeri quelli che corrispondono a figure piane diconsi *poligoni*, prendendo la special denominazione dal numero de' lati, e però chiamandosi *triangolari*, se le loro unità sieno disponibili in triangoli; *quadrati* se in forma di quadrato; *pentagonali*, se di pentagono; e così in seguito. Gli altri poi le cui unità possonsi concepir disposte in forma di piramide denominansi *piramidali*; e queste piramidi per una stessa specie, diverse solo nel numero di unità per ciascun lato, e per ispecie diversa, variando ancora nel poligono regolare che ne costituisce la base, danno a que' numeri la caratteristica di *piramidali a base triangolare*, o *quadrata*, o *pentagona*; che, per brevità, potranno dirsi *piramido-triangolari*, *piramido-quadrati*, *piramido-pentagonali*, ec.

435. Le ricerche intorno a tali numeri, che possono esser utili in diversi rincontri di Analisi algebrica, e della Geometria, e che serviranno ancora di esercizio delle teoriche esposte nel precedente capitolo, riduconsi ad assegnare la loro genesi, ed il modo come ciascun di que' numeri derivasi dal lato di esso, che sia dato, o pur questo da quello; il loro termine *generale*, e 'l *sommatorio*; le quali cose verranno tutte dichiarate nel presente capitolo.

436. Def. xix. Il *termine generale* di una serie è quella funzione della $n$ (che ne dinota il numero indeterminato di termini), nella quale ponendo per questo un numero determinato, si ha il valore del termine che ha per radice questo numero.

Così della progressione il cui termine sia $a$, e la diffe-

renza $d$, il termine generale è indicato dalla formola

$$t = a + (n - 1)d$$

437. Def. xx. È quella funzione della $n$, nella quale ponendo per questa un numero determinato si ha la somma de' termini della serie fino a quel numero, dicesi *termine sommatorio* della serie.

Così nelle progressioni aritmetiche, il cui primo termine sia $a$, e la differenza $d$, il termine sommatorio viene espresso dalla formola

$$s = na + \frac{n(n-1)d}{2}$$

438. Def. xxi. Se i termini di una progressione aritmetica che cominci da 1 si sommino continuamente, la serie di numeri che si otterrà sarà di numeri *poligoni*. E questi saranno *triangolari*, se la differenza o ragione della progressione era 1, cioè questa era quella de' numeri naturali; saranno *quadrati*, se tal differenza era 2 (427.), *pentagonali* se 3, *esagonali* se 4, e così in seguito: di tal che la specie del numero poligono supererà sempre di due unità la ragione della serie.

439. Sia di fatti la progressione de' numeri naturali

1  2  3  4  5  6  7  8  9 . . .

sommandoli successivamente si ha la serie

1  3  6  10  15  21  28  36  45 . . .

che sono i numeri *triangolari*, poichè le unità loro possono disporsi come qui sotto

```
                                                .
                                .             .   .
                .             .   .         .   .   .
        .     .   .         .   .   .     .   .   .   .
.     .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .   .
```

Similmente dall' altra progressione aritmetica a differenza 2,

1  3  5  7  9  11  13  15 . . . . .

si ottiene con la somma successiva de' termini la serie de' numeri *quadrati*

1  4  9  16  25  36  49  64 . . . . .

le cui unità sono disponibili in quadrati nel seguente modo

```
                                   . . . . .
                       . . . .     . . . . .
            . . .      . . . .     . . . . .
     . .    . . .      . . . .     . . . . .
.    . .    . . .      . . . .     . . . . .
```

In oltre sommando successivamente i termini della progressione a differenza 3

1   4   7   10   13   16   19 . . . .

si ha la serie de' numeri *pentagonali*

1   5   12   22   35   51   70 . . . .

i cui termini sono disponibili in forma di pentagono, ed il lato è rappresentato da' termini della serie che ha bisognato sommare.

E così in seguito pe' numeri *esagonali*, *ettagonali*, *ottagonali*, *ennagonali*, *ec.*

440. Ed in generale essendo $d$ la differenza della progressione aritmetica, sicchè questa sia dinotata da

$1,\ 1+d,\ 1+2d,\ 1+3d\ \ldots\ldots\ldots\ldots$

la serie corrispondente di numeri poligoni sarà

$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d\ \ldots\ \ n+\frac{n(n-1)}{2}d$

441. È facile anche osservare, che la differenza della serie dinoti il numero de' triangoli in cui ciascun poligono rappresentato in figura si può dividere. Così essendo 1 la differenza pe' numeri triangolari, essi non sono divisibili in altri triangoli co' vertici ne' punti medesimi; pe' quadrati la differenza 2 dinota che sieno divisibili in due triangoli; pe' numeri pentagonali la differenza 3 della serie indica esser divisibili in tre triangoli; e così per gli esagonali la differenza 4 dinoterebbe esser divisibili in quattro triangoli, *ec.*

442. Risultando i numeri poligoni dalle somme successive de' termini di una progressione aritmetica di cui il primo termine è 1, la differenza 1, o pur 2, o pur 3. *ec.*, si vede

che il *termine generale* della serie de' numeri poligoni debba risultare dalla formola

$$t = an + \frac{n(n-1)d}{2}$$

sicchè *pe' numeri triangolari*, essendo $a = 1$, $d = 1$, si avrà il termine generale

$$t = \frac{n(n+1)}{2}$$

*pe' numeri quadrati*, ove la $d = 2$, si avrà

$$t = n^2$$

*pe' pentagonali*, ove $d = 3$, sarà

$$t = \frac{n(3n-1)}{2}$$

E così continuando in appresso, sarà

*Pe'num. esagonali* $t = n(2n-1)$

*Pe'num. ettagonali* $t = n\frac{(5n-3)}{2}$

*Per gli ottagonali* $t = n(3n-2)$

*Per gli ennagonali* $t = n\frac{(7n-5)}{2}$

*Pe' decagonali* $t = n(4n-3)$

E senza rinvenirli ne'casi successivi è facile ravvisare la legge come debbansi per essi comporre i termini generali; sicchè pel numero poligono

*m-agonale* sarà $t = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}$

443. Così volendo il numero poligono di 20 lati, di cui ciascuno sia di 25 unità, sarà $m = 20$, $n = 25$; e però un tal numero risulterà

$$\frac{18.25^2 - 16.25}{2} = 5425$$

E volendo quello di 25 lati ciascun de' quali costi di 36 unità, esso sarà

$$18(23.36 - 21) = 14526.$$

444. Dalle precedenti considerazioni si è indotti a risolvere il problema inverso di : *Determinare il lato* [45] *di un dato numero poligono* ; il qual problema , come si vede, risolvesi facilmente con pareggiare il termine generale di un qualunque numero poligono , assegnato nel §.442 , al dato numero poligono , per determinare da questa equazione la $n$ del termine generale , ch' è il lato cercato .

Così pel numero triangolare 91 l' equazione a trattare per determinarne il lato sarebbe

$$\frac{n^2+n}{2}=91$$

d' onde si ha risolvendola

$$n=\frac{-1\pm\sqrt{729}}{2}$$

che , prendendo il solo segno + del $\sqrt{}$ , giacchè l' inferiore sarebbe assurdo nel caso presente , dà pel lato richiesto

$$n=13.$$

445. Che se il numero triangolare fosse stato indicato generalmente per $h$, la sua radice sarebbe risultata

$$n=\frac{-1+\sqrt{(8h+1)}}{2}$$

ove $8h+1$ dovendo essere necessariamente un quadrato (426.) , la $n$ dee però risultar razionale, come richiedevasi.

446. Pe' numeri quadrati l' operazione a farsi ritorna a quella dell' ovvio modo aritmetico.

447. Pe' numeri pentagonali essendo il termine generale $\frac{n(3n-1)}{2}$ , ove $n$ rappresenta il lato, bisognerà però , per ritrovar questo corrispondente ad un dato numero pentagonale $h$ maneggiar l' equazione

$$\frac{n(3n-1)}{2}=h$$

[45] Un tal lato suol dirsi anche *radice* ; ma questa denominazione essendo men propria che la prima , riteniamo quella.

d' onde si avrà

$$n = \frac{1 + \sqrt{(24h + 1)}}{6}$$

è però : *per ottenere il lato di un numero pentagonale bisogna moltiplicarlo per 24 , ed accresciuto tal prodotto di 1 , estrarre da questa quantità , che dee risultare un quadrato perfetto , la radice, la quale accresciuta di nuovo di 1 , e divisa la somma per 6 , darà il lato richiesto.*

448. E si vede ancora, che: *ogni numero pentagonale preso 24 volte ed accresciuto di 1 sia un numero quadrato impare, la cui radice accresciuta di 1 è un moltiplice di 6.*

449. Senza prolungar queste ricerche per altri numeri poligoni , nel che si potranno esercitare utilmente i giovani , daremo quì la formola pel caso generale del numero *m-agonale*.

Prendendo l' espression generale corrispondente al lato di un tal numero (442.) e pareggiandola ad $h$ , si ha l' equazione $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2} = h$

che convenevolmente maneggiata darà

$$n = \frac{m-4}{2(m-2)} + \sqrt{\left(\frac{(m-4)^2}{4(m-2)^2} + \frac{2h}{m-2}\right)}$$

$$= \frac{m-4}{2(m-2)} + \sqrt{\left(\frac{(m-4)^2}{4(m-2)^2} + \frac{8h(m-2)}{4(m-2)^2}\right)}.$$

$$= \frac{m-4+\sqrt{\left((m-4)^2 + 8h(m-2)\right)}}{2(m-2)}$$

La qual formola somministrerà, senza nuovo calcolo, i lati di tutt' i numeri poligoni di qualunque ordine : e ritornando a quello di un numero pentagonale , ove $m = 5$ , la formola proposta diviene

$$n = \frac{1 + \sqrt{(1 + 24h)}}{6}$$

come si era rinvenuto nel §.447.

450. A compiere il presente argomento rimane a determinare *il termine sommatorio* di ciascuna serie di numeri poligoni. Cominciando dunque da' numeri triangolari la cui serie è

$$1\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 15 \ldots \frac{n(n+1)}{2}$$

Ciascun di essi scindasi ne' numeri della serie naturale da cui è composto, disponendoli nel seguente modo in linee verticali

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
3 &= 1 + 2 \\
6 &= 1 + 2 + 3 \\
10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\
15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{n(n+1)}{2} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots\ldots + n
\end{aligned}$$

Sicchè chiamando $S_t$ [46] la somma della 1ª linea verticale precedente i segni di uguaglianza, la quale è appunto la somma de' numeri triangolari, sarà essa uguale alla somma di tutte le linee verticali seguenti un tal segno, e però

$$S_t = n + 2(n-1) + 3(n-2) + 4(n-3) + 5(n-4) \ldots + n\Big((n-(n-1)\Big)$$

$$= n(1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + n)$$

$$-\Big(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 \ldots\ldots + n(n-1)\Big)$$

la qual seconda linea corrispondendo a

$$2\left(1 + 3 + 6 + 10 + 15 \ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

cioè alla stessa serie di numeri triangolari indicata da $S_t$ me-

[46] È in questo modo che indicheremo il *termine sommatorio* di ciascuna serie di numeri poligoni, cioè scrivendo a piedi della $S$ la letterina iniziale della specie del numero poligono, o sia $t$ pe' triangolari, $q$ pe' quadrati, $p$ pe' pentagonali, ec.

no l' ultimo termine $\frac{n(n+1)}{2}$, ridurrà l' espressione superiore ad

$$S_t = n.\frac{n(n+1)}{1.2} - 2\left(S_t - \frac{n(n+1)}{1.2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{1.2}(n+2) - 2S_t$$

e quindi
$$3S_t = \frac{n(n+1)}{1.2}(n+2)$$

ed
$$S_t = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

451. La somma della serie de' numeri quadrati a cominciar dal primo si otterebbe, con procedimento analogo al precedente; ma essa può più facilmente aversi dietro la considerazione, che essendo $\frac{n(n+1)}{2}$ il termine $n$ della serie de' numeri triangolari, ed $\frac{(n-1)n}{2}$ il termine $n-1$ della stessa, la loro somma $n^2$ produce il numero quadrato corrispondente al termine $n$ della serie *triangolare*; e però la serie de' numeri quadrati risulta quanto il doppio di quella de' numeri triangolari, meno il termine $n$ cui si arresta tal somma, il quale viene ad esser preso una sol volta, cioè

$$S_q = 2S_t - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

452. Per maggiormente introdurre i giovani a questa ricerca ne daremo un altro esempio in determinar la somma della serie de' numeri *pentagonali*, che scriveremo verticalmente, con risolverne ciascun termine ne' suoi componenti della progressione aritmetica da cui è derivata (439.). Quindi

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
5 &= 1+4\\
12 &= 1+4+7\\
22 &= 1+4+7+10\\
35 &= 1+4+7+10+13\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\frac{n(3n-1)}{2} &= 1+4+7+10+13\ldots\ldots+(3n-2)
\end{aligned}
$$

E però sarà

$$
\begin{aligned}
S_p &= n+4(n-1)+7(n-2)+10(n-3)+13(n-4)\ldots\ldots\\
&= n(1+4+7+10+13\ldots)\\
&\quad -2(2+7+15+26+\ldots\ldots)
\end{aligned}
$$

Ma da questa seconda linea, scrivendo pur verticalmente la serie ch' è nel vincolo, che dinoterò per $\sigma$, e decomponendola come si vede

$$
\begin{aligned}
2 &= 2\\
7 &= 2+5\\
15 &= 2+5+8\\
26 &= 2+5+8+11\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\sigma &= 2(n-1)+5(n-2)+8(n-3)+11(n-4)\\
&= n\left(2+5+8+11+\ldots.\right)\\
&\quad -2\left(1+5+12+22\ldots.\right)
\end{aligned}
$$

Quindi si avrà

$$
S_p = \frac{n^2(3n-1)}{2} - \frac{2n(n-1)(3n-2)}{2} + 4S_p - \frac{4n(3n-1)}{2}
$$

$$
3S_p = \frac{n}{2}\Big(2(n-1)(3n-2)-(3n-1)(n-4)\Big) = \frac{n}{2}(3n^2+3n)
$$

$$
S_p = \frac{n^2(n+1)}{2}
$$

453. Def. xxii. Sommaudo successivamente, a cominciar dal primo 1, i termini di ciascuna serie di numeri poligoni; le nuove serie che risultano si dicono di numeri *piramidali*. Poichè le unità di ciascun numero possono concepirsi disposte in piramide retta a base quel poligono regolare del nome della serie proposta.

454. E però a distinguerli starà bene inchiudere questa condizione nel denominarli, e quindi dire *piramo-triangolari* quelli che derivano dalla serie de' numeri triangolari, *piramo-quadrati* i nascenti dalla serie de' numeri quadrati; *piramo-pentagonali* quelli che si hanno dalla serie de' numeri pentagonali: e così in appresso.

455. Sommando dunque la serie de' numeri triangolari,

$$1 \ , \ 3 \ , \ 6 \ , \ 10 \ , \ 15 \ , \ldots \frac{n(n+1)}{2}$$

la nuova serie

$$1 \ , \ 4 \ , \ 10 \ , \ 20 \ , \ 35 \ , \ldots$$

sarà de' numeri *piramo-triangolari*. Di fatti le unità del 4 possono rappresentare i vertici di un tetraedro, o gli estremi di ogni suo lato; quelle del 10 corrispondono al tetraedro, di cui a ciascun triangolo ne toccan 6, ossia a ciascun lato tre unità; le altre del 20 al tetraedro di cui ciascun triangolo è rappresentato da 10 unità, ossia a ciascun lato ne spettan quattro. E così in appresso.

Sommando in oltre la serie de' numeri quadrati

$$1 \ , \ 4 \ , \ 9 \ , \ 16 \ , \ 25 \ , \ldots$$

la nuova serie

$$1 \ , \ 5 \ , \ 14 \ , \ 30 \ , \ 55 \ , \ldots$$

sarebbe quella de' numeri *piramo-quadrati*; e le loro unità saranno disponibili in piramide retta, la cui base sia un quadrato. Così il numero 5 rappresenterà quella nella quale ciascun' unità stia nel vertice di ciascun angolo, ossia nell' estremità di ciascun lato; il numero 14 l' altra in cui la base

quadrata abbia 9 unità, corrispondendone 3 a ciascun lato, ed ognun de' triangoli che la cingono ne ha 6, dalla somma de' quali quattro volte tolte le unità comuni con la base e tra loro, ne rimangono sole 5, che con le prime 9 fanno il numero 14. E lo stesso ragionamento potrà protrarsi per gli altri; e poi pe' numeri *piramo-pentagonali*, *piramo-esagonali*, *ec.*

456. È facile comprendere, che il termine generale di ciascuna serie di numeri piramidali sia il sommatorio fino al termine stesso della serie dalla quale essa è derivata; sicchè indicandolo per $T_{p\text{-}t}$ pe' numeri *piramo-triangolari*, per $T_{p\text{-}q}$ pe' numeri *piramo-quadrati*, per $T_{p\text{-}p}$ pe' numeri *piramo-pentagonali*, e così in seguito, si abbia

$$T_{p\text{-}t} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$$

$$T_{p\text{-}q} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.}$$

$$T_{p\text{-}p} = \frac{n^2(n+1)}{1.2.}$$

. . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . .

457. Avutosi un tal termine generale, si passerà a rinvenire la *somma generale*, o sia il *termine sommatorio* di ciascuna di tali serie, con lo stesso procedimento tenuto nel §. 450. Di che daremo un esempio pe' soli numeri *piramo-triangolari*, potendo ciò bastare, in questo luogo, per un argomento, che venendo compreso in quello delle serie a differenze costanti, del pari che l' altro de' numeri poligoni, dovrà occuparci in modo più convenevole nel trattato delle serie, che fa parte del vol. II. di questo *Corso*.

458. Adunque essendo una tal serie di numeri

$$1\ ,\ 4\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 35\ ,\ 56\ldots\ \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

si avrà

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
4 &= 1 + 3\\
10 &= 1 + 3 + 6\\
20 &= 1 + 3 + 6 + 10\\
35 &= 1 + 3 + 6 + 10 + 15\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 \ldots + \frac{n(n+1)}{2}$$

e però

$$S_{p-1} = n + 3(n-1) + 6(n-2) + 10(n-2) + 15(n-4) \ldots + \frac{n(n+1)}{2}\Big(n-(n-1)\Big)$$

$$= n\left(1 + 3 + 6 + 10 + 15 \ldots - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$-3\left(1 + 4 + 10 + 20 \ldots + \frac{(n-1)n(n+1)}{2.3}\right)$$

$$= n'\frac{(n+1)(n+2)}{1.2.3} - 3S_{p-1} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$$

Quindi

$$4S_{p-1} = \frac{n'(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \frac{3n(n+1)(n+3)}{1.2.3}$$

ed

$$S_{p-1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

459. Finalmente perchè non mancasse a' giovani alcuna nozione di quelle relativamente a queste tali specie di serie ch' essi potrebbero trovar notata imbattendosi in altre opere di analisti moderni, accenneremo, che le serie considerate, e le altre che si potrebbero da esse successivamente comporre nel modo stesso, diconsi di *numeri ordinati*. E cominciando dall' assumere per serie primitiva quella a differenza 0, come

$$1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ ,\ 1\ \ldots.$$

dalla somma successiva de' termini di essa si avrà la serie de' numeri naturali

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ \ldots.$$

che sarebbe però quella de' numeri *ordinali di 2° ordine.*

Sommando continuamente dal primo i termini di questa serie, si avrebbe quella de' numeri triangolari

1 , 3 , 6 , 10 , 15 . . . . .

che sarebbero i numeri *ordinali di 3° ordine.*

Di nuovo sommando questi continuamente dal primo si avrebbe la serie de'numeri piramidali

1 , 4 , 10 , 20 , 35 . . . . .

che sarebbero gli *ordinali di 4° ordine*, da' quali sommandoli successivamente, ne deriverebbero gli *ordinali di 5° ordine*. E così in seguito.

460. E si vede anche dal procedimento tenuto, che i numeri *ordinali di 2° ordine* abbiano per differenza, tra due prossimi di essi, l' 1, cioè i numeri dell' ordine precedente, gli *ordinali di 3° ordine* abbiano per differenza i termini della serie di quelli del 2° *ordine*, e però che le seconde differenze tra' termini prossimi di essi sieno 1. E così quelli di 4° *ordine* abbiano per differenza de' loro termini prossimi la serie dell' ordine precedente, e però sieno 1 le terze differenze tra' termini prossimi di esse. Ed in generale che i numeri ordinali dell' *ordine* $n$ abbiano l' 1 per differenza del rango $n - 1$ de' loro termini prossimi; e così in appresso.

461. Ed in oltre è pur evidente, che il termine generale di ciascuna serie dell' ordine $r$ sia quanto il sommatorio di quelli corrispondenti fino ad esso nella serie dell'ordine $r-1$.

462. E però essendo $n$ il *termine generale* della serie de' numeri naturali, cioè l' ordinale di 2° *ordine*, ed $\frac{n(n+1)}{2}$ quello della serie de' numeri triangolari, cioè l' ordinale di 3° *ordine*, starà quello a questo come $2 : n + 1$; e siccome il 2 rappresenta l' ordine della prima di tali serie, potrà il rapporto dell' una all' altra esprimersi per $r : n + r - 1$. Similmente il termine $n$ de' numeri triangolari, cioè del 3° *ordine* starà al corrispondente nella serie *piramo-triangolare*,

e però del 4° *ordine*, come $\frac{n(n+1)}{1.2} : \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
cioè come $3 : n+2$, o sia come $r : n+r-1$. E così continuando in appresso, potrà conchiudersi generalmente esser questa la formola generale della ragione di un termine dell' *ordine* $r$ a quello corrispondente dell' *ordine* $r+1$.

463. Indicando con $T''$, $T'''$, $T^{iv}$, $T^{v}$ . . i termini generali delle serie de' numeri ordinali dal 2° *ordine* in poi;

ed essendo $\quad T'' = n$

si avrà

$$T''' = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

$$T^{iv} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

$$T^{v} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

Ed in generale per la serie de' numeri ordinali dell' ordine $r$ si avrà il termine generale

$$T^{(r)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+r-3)(n+r-2)}{1.2.3.4\ldots\quad r-2 \quad r-1}$$

464. E ciò può bastare per questo argomento, del quale alcun uso non occorrerà fare nel presente trattato dell' *Analisi determinata*, e che rientra in quello delle serie a differenze costanti, di cui dovrà ragionarsi nel volume II. del presente *Corso di Analisi algebrica*.

## CAPITOLO XVI.

### Delle ragioni, proporzioni e progressioni geometriche.

465. La *ragione* e la *proporzione geometrica* furono ben definite da Euclide nel lib. V. degli *Elementi*, da farne corrispondere la nozione alla quantità in generale ; e però le proprietà di quelle raccolgonsi in modo esatto e rigoroso dalle proposizioni di un tal libro, che come fu detto nel *discorso preliminare* alla Geometria, non è speciale per questa scienza , ma bensì un vero libro di *analisi matematica* . Nulladimeno conviene che quì se ne renda l' idea più adeguata pel calcolo algebrico. Adunque :

466. Def. xxiii. La *ragione geometrica* di una quantità ad un'altra omogenea vien dinotata dal quoziente dell' una, che dicesi *antecedente*, per l' altra che si chiama *conseguente* , il qual quoziente dicesi *esponente* della ragione . E però la ragione di $a : b$ risulta espressa da $\frac{a}{b}$, e viceversa da $\frac{b}{a}$ quella di $b : a$ ; e queste diconsi vicendevolmente l' una *inversa* dell' altra.

467. E volendo a questa ragione dare una denominazione analoga all' altra che fu data per la ragione *aritmetica* , che dissimo *per differenza* , potrà dirsi *per quoziente* [47] . Ciò posto , essendo $\frac{a}{b} = \frac{n.a}{n.b}$, ove $n$ sia un numero intero o fratto,

[47] La denominazione di *geometrica* ha dovuto derivare da che di questa specie di ragione , che costituisce il vero rapporto di due grandezze, trovavasi trattato da Euclide tra' libri di Geometria ; e però a distinguerne l' altra precedentemente esposta fu detta *aritmetica* . Essendo però prevaluto l' uso di chiamarle a quell' antico modo , non conviene assolutamente cambiarlo.

o un' altra quantità qualunque, si rileva perciò, che : *non si cambia la ragione tra due quantità moltiplicandone, o ancor dividendone i termini per una terza qualunque.*

468. Def. xxiv. Essendo $\frac{a}{b} = \frac{n.a}{n.b}$, l' uguaglianza di queste due ragioni costituirà ciò che dicesi proporzione tra le quattro quantità $a$, $b$, $n.a$, $n.b$, che si suol dinotare nel seguente modo

$$a : b :: n.a : n.b$$

cioè, $a$ a $b$ come $n.a$ ad $n.b$

469. Ed è chiaro, tanto dalla riduzione di que' fratti allo stesso denominatore, quanto per intuizione dalla precedente proporzione, che debba in essa *il prodotto de' termini estremi pareggiare quello de' termini medii*. Di tal che, *se sieno noti i due medii, e l' un de' termini estremi, si otterrà l' altro dividendo il prodotto di quelli per questo*. Il che, nel caso de' due medii uguali, cioè di una proporzione *continua*, ed espressa però da tre soli termini, riviene a *dividere il quadrato del secondo termine pel primo*. Ed al contrario : *avendo i due estremi, si troverà il medio estraendo la radice quadrata dal prodotto di quelli.*

Così avendosi i tre termini $a$, $b$, $p$; il *quarto proporzionale* in ordine ad essi sarà $\frac{b.p}{a}$. Avendosi poi i due $a$, $b$, il *terzo proporzionale* sarà $\frac{b^2}{a}$; ed il medio proporzionale tra $a$,$b$ verrà espresso da $\sqrt{a.b}$.

470. Ed è pur chiaro, per conseguenza, che se abbiansi gli uguali prodotti $a.q = b.p$
debba risultare (467) $a:b :: p:q$
il che può ancora rilevarsi dividendo que' prodotti uguali per $bq$, da che risulta

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

e però (404) $a : b :: p : q$

471. Adunque può stabilirsi per principio fondamentale che : *sieno proporzionali quattro grandezze , se il prodotto di due di esse , che prendansi come termini estremi della proporzione , pareggi quello delle altre due.*

472. E però se abbiasi

$$a : b :: p : q$$

dovrà ancora essere

I. $$a : p :: b : q$$

la quale nuova proporzione , tra gli antecedenti ed i conseguenti della proposta, dicesi *permutata* di questa

II. $$a + b : b :: p + q : q$$

che dicesi per *composizione* da quella di $a : b :: p : q$

III. $$a - b : b :: p - q : q$$

ch' è la *divisa* della proposta

IV. $$a : a - b :: p : p - q$$

*conversa* della proposta .

E da queste, combinandole, altre proporzioni potrebbero ancora ottenersi , delle quali noteremo qui la sola seguente

473. Essendo $a : b :: p : q :: k : l$

sarà *permut.* $a : p :: b : q$

e *componendo* $a + p : p :: b + q : q$

e di nuovo *perm.* $a + p : b + q :: p : q :: k : l$

d' onde con lo stesso procedimento di poc' anzi si perverrà ad avere

$$a + p + k : b + q + l :: k : l$$

E così in appresso, se le ragioni proposte fossero più di tre. Adunque : *avendosi più ragioni uguali starà la somma degli antecedenti a quella de' conseguenti , come un antecedente al suo conseguente.*

474. Avendosi poi più ragioni tra quantità omogenee , come di $a : b , c : d , e : f \dots$

si otterrà da esse l' altra del prodotto degli antecedenti a quello de' conseguenti , cioè di

$$a \times c \times e \dots : b \times d \times f \dots$$

che dicesi la ragione *composta* da quelle ; la quale nel caso di due sole ragioni ed uguali, come di $a : b$, e di $a : b$ diviene quella de'quadrati di $a : b$, cioè di $a^2 : b^2$. E se le componenti fossero tre ed uguali , ciascuna espressa da $a : b$, la composta risulterebbe di $a^3 : b^3$, che si direbbe *triplicata* di $a : b$, e sarebbe quella de' cubi de' termini $a$ , $b$ della ragione data ; e così in appresso. D'onde *viceversa* risulta, che avendosi la ragione di $a : b$ , quella di $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ ne sarà la *sudduplicata* ; l' altra di $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ la *suttriplicata* ; e così in appresso .

475. E vedesi facilmente, che l'esponente della ragion composta sia in generale quanto il prodotto degli esponenti delle ragioni componenti , perchè

$$\frac{ace..}{bdf..} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \,..$$

E che nelle ragioni *duplicata* , *triplicata*, *ec.* l' esponente sia il *quadrato* , il *cubo* , *ec.* di quello di una delle componenti uguali ; come al contrario nella *sudduplicata* , *suttriplicata* , *ec.* sia la *radice quadrata* , *cubica* , *ec.* di quello della ragione proposta.

476. E rendesi pur evidente , che avendosi le quantità omogenee

$$a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\,....\,r\,,\,t$$

debba essere

$$a \times b \times c \times d\,..\,\times r : b \times c \times d\,..\,\times t :: a : t$$

cioè come la prima all' ultima di esse , ch' è la nozione data da Euclide dalla ragion composta ( *def. A. Elem. V.*) .

E che essendo le tre grandezze $a$ , $b$ , $c$ in continua proporzione, la ragione di $a : c$ risulti duplicata di quella di $a : b$; come pure essendolo le quattro $a$ , $b$ , $c$ , $d$, debba la ragione di $a : d$ risultar triplicata di quella di $a : b$ ; e così in appresso . Di tal che essendo tali grandezze fino a $t$ al numero $n$ , la ragione di $a : t$ sarà $(n - 1)$*plicata* di quella di $a : b$ ; come da Euclide si era stabilito nelle corrispondenti definizioni del libro V.

477. Or se tra le componenti

$$a : b\ ,\ c : d\ ,\ e : f\ ..$$

ve ne sia alcuna di uguaglianza, come, *p.e.*, quella di $c : d$; è chiaro che tanto sia la composta di

$$a \times c \times e : b \times d \times f$$

quanto l'altra di $\quad a \times e : b \times f.$

Di fatti l' esponente della prima $\frac{a\,c\,e}{b\,d\,f}$ riducesi ad $\frac{a\,e}{b\,f}$, ch'è precisamente l'esponente della seconda. Laonde:

*Le ragioni uguali non entrano nella composta da più ragioni; poichè non valgono a cambiarne l' esponente.*

478. In oltre se le due componenti $a : b$, $c : d$ una ragione sieno l'una inversa dell'altra, cioè che stia $a : b :: d : c$, la composta $a \times c : b \times d$ sarà la stessa che quella risultante dalle due di $d : c$, e di $c : d$, e però espressa da $d \times c : c \times d$, cioè di uguaglianza. Il che rilevasi ancora da ciò, che l' esponente della ragion composta è

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1\ .$$

Quindi: *Incontrandosi tra più componenti una di esse inversa di un' altra, queste due si potranno tralasciare nel prendere la ragion composta*; poichè dalle medesime risulta una componente di uguaglianza (477.).

479. È chiaro eziandio, che la composta dalle ragioni di

$$a : b\ ,\ c : d$$

risulti la stessa che l' altra di quelle di

$$a : d\ ,\ b : c$$

E però, che: *Non si alteri la composta da due, o anche più ragioni, comunque si scambiino i loro conseguenti.* Il che è facile accorgersi avvenir pure scambiando comunque i soli antecedenti.

480. Def. xxv. Per *progressione geometrica* s' intende una seguela di termini, che serbinsi l' un l' altro la stessa ragio-

ne geometrica, cioè che i quozienti dell' uno per l' altro prossimo sieno uguali.

E però se la quantità $a$ si moltiplichi successivamente per l' altra $q$, sicchè abbiasi la serie

$$a \ , \ aq \ , \ aq^2 \ , \ aq^3 \ , \ aq^4 \ . \ . \ aq^{n-1} \ , \ aq^n$$

sarà questa una progressione geometrica.

481. Quindi un termine qualunque $aq^m$ di una progressione geometrica starà ad un altro $aq^r$ della medesima come $1 : q^{r-m}$ ; e prendendo nella stessa progressione due altri termini tra' quali sieno frapposti ancora $r-m$ termini, il rapporto dell' un di questi all' altro risulta ancora $1 : q^{r-m}$; e però : *vi sarà proporzione tra due termini qualunque di una progressione geometrica, e due altri in ordine equidistanti tra loro*.

482. Deriva ancora dalla precedente definizione, che un termine qualunque risulterà dal primo moltiplicandolo successivamente per l' esponente della progressione, e però che quello dell'ordine $n$ risulterà dal 1° moltiplicandolo per $n-1$ volte l' esponente. Adunque se quel termine s'indichi con $a$, con $q$ l' esponente, e con $t$ il termine $n$, che dicesi *termine generale* (436.), dovrà esser

$$\text{I.} \qquad t = aq^{n-1}$$

483. Or poichè nella progressione geometrica esposta, la cui somma indichisi con $s$, sono antecedenti tutt'i termini dal 1° al penultimo, cioè da $a : aq^{n-1}$, e conseguenti tutti quelli dal 2° all' ultimo, cioè da $aq : aq^{n-1}$, si avrà però la somma de' primi a quella de' secondi come il 1° termine al 2° (473.). Ma la somma de' primi è $s - aq^{n-1}$, e quella de' secondi $s - a$.

Adunque si avrà

$$s - aq^{n-1} : s - a :: a : aq :: 1 : q$$

e però
$$sq - aq^n = s - a$$

ed
$$s(q-1) = a(q^n - 1)$$

d' onde II.
$$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}.$$

Cioè : *il termine sommatorio di una progressione geometrica di n termini, di cui il primo sia a, e l' esponente q, risulta espresso da questi elementi nell' anzidetto modo.*

484. Combinando le due equazioni ottenute ne' due precedenti §§., pel termine generale e pel sommatorio di una progressione, si potrà risolvere lo stesso problema trattato nel §.423. per le progressioni aritmetiche, cioè di esibire da tre de' cinque elementi $a$, $q$, $n$, $t$, $s$ gli altri due; il che si vedrà in prospetto eseguito qui appresso.

Dalla I. si ha $t$ dati $a, n, q$ [1]

e si avrebbe da $t, n, q$ [2]

III. $a = \dfrac{t}{q^{n-1}}$

da $a, t, n$ [3]

IV. $q = \sqrt[n-1]{\dfrac{t}{a}}$

da $t, a, q$ [4]

V. [48] $q^{n-1} = \dfrac{t}{a}$

dalla II. si ha $s$ dati $a, q, n$ [1]

ed in oltre da $s, q, n$ [5]

VI. $a = \dfrac{s(q-1)}{q^n - 1}$

da $a, s, n$ [6]

VII. [49] $q^n - \dfrac{s}{a}q + \dfrac{s}{a} - 1 = o$

da $a, q, s$ [7]

VIII. [48] $aq^n = (q-1)s + a$

[48] Da questa equazione si dee ricavare il valore della $n$; ed il modo di ottenerlo si vedrà nel capitolo seguente. Lo stesso per le equazioni VIII, XII e XVI.

[49] Questa equazione, e l'altra XI, per determinare la $q$ esigono il maneggio dell' equazione al grado $n$. E le analoghe XIII, e XIV, quello di un' equazione del grado $n-1$.

E da queste combinata con la I derivano le seguenti altre formole , cioè dalla combinazione della I. con la VI. si ha

da $s,\ n,\ q$ [5]

IX. $t = sq^{n-1} \cdot \dfrac{q-1}{q^n-1}$

da $t,\ n,\ q$ [2]

X. $s = \dfrac{t}{q-1} \cdot \dfrac{q^n-1}{q-1}$

da $s,\ t,\ n$ [8]

XI. [49] $q^n - \dfrac{s}{s-t}\, q^{n-1} + \dfrac{t}{s-t} = o$

da $q,\ t,\ s$ [9]

XII. [48] $\Big(qt - (q-1)s\Big)q^{n-1} = t$

Combinando la I. con la VII. si ha

da $s,\ n,\ t$ [8]

XIII. [49] $(s-a)\sqrt[n-1]{a} = (s-t)\sqrt[n-1]{t}$

da $a,\ s,\ n$ [6]

XIV. [49] $(s-a)\sqrt[n-1]{a} = (s-t)\sqrt[n-1]{t}$

da $a,\ n,\ t$ [3]

XV. $s = \dfrac{t\sqrt[n-1]{t^n} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}$

da $a,\ s,\ t$ [10]

XVI. [48] $t(s-t)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$

E dalla I. combinata con l' VIII. si ha

da $t,\ a,\ q$ [4]

XVII. $s = \dfrac{tq-a}{q-1}$

da $\quad a,\ s,\ t \quad$ [10]

XVIII. $\quad q = \frac{s-a}{s-t}$

da $\quad s,\ t,\ q \quad$ [9]

XIX. $\quad a = q(t-s) + s$

da $\quad a,\ q,\ s \quad$ [7]

XX. $\quad t = \frac{s(q-1)+a}{q}$

485. Ad oggetto di dare per ora qualche idea dell'uso vantaggioso delle precedenti formole, ne applicheremo alcuna a risolvere i due seguenti problemetti, riserbandoci un più esteso esercizio di esse nell' ultimo capitolo di questa *Parte I.* del presente trattato.

### Problema I.

486. *Tra due numeri dati $a$, $b$ si vuole inserire un numero $m$ di medii geometricamente proporzionali.*

*Soluzione.*

È chiaro che la ricerca del presente problema sia quella di assegnar la ragione di una progressione geometrica, di cui sia dato il primo termine $a$, l'ultimo $t$, e 'l numero de' termini $m+2$, e però che debba soddisfarvi la formola

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$$

la quale per essere la $m = n+2$, riducesi a

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a}{b}}$$

che darà il valore della $q$ (517.*n*.1.)

487. Sia in un caso $a = 1$, $b = 256$, $n = 7$

risulterà $\qquad q = \sqrt[8]{256} = 2$

e però la serie de' termini proporzionali continuamente sarà

1, 2, 4, 8, 16, 32, 128, 256.

### Problema II.

488. *L' inventore del giuoco degli scacchi* [40] *avendolo presentato ad un re indiano , ed obbligato da questo a richieder egli quel premio che volesse , dimandogli un cumulo di grano i cui acini pareggiassero quelli che risulterebbero dal porne 1 nel primo quadratino della schiacchiera, 2 nel secondo, 4 nel terzo , e così sempre raddoppiando fino all' ultimo de' quadratini che è il 64°. Si cerca sapere qual fosse la quantità di grano dimandato.*

*Soluzione.*

È chiaro che si cerchi la somma della progressione geometrica in ragion doppia, cominciando da 1 fino al termine 64° ; e però che debba soddisfarvi la formola

$$s = \frac{aq^n - 1}{q - 1}$$

in cui essendo $a = 1$ , $q = 2$ , $n = 64$
riducesi ad

$$s = 2^{64} - 1$$

che sviluppata corrisponde all' ingente numero [41]

18, 446, 743, 083, 709, 551, 615.

---

[40] Vedi *preliminare* pag. IX.

[41] Si vedrà nel capitolo seguente in qual modo possa più facilmente ottenersi la potenza $64^a$ di 2 .

## CAPITOLO XVII.

### PRIME NOZIONI SU I LOGARITMI, SPECIALMENTE DE' *VOLGARI*.

489. Poichè una qualunque progressione geometrica può sempre ridursi alla forma

$$a(1, q, q^2, q^3, q^4, q^5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot q^{n-1})$$

potrà però considerarsi assolutamente nel modo com' essa è espressa nel vincolo, e quindi col primo termine 1, mentre gli altri successivi sieno le potenze 1, 2, 3 . . . di $q$; e per simmetria potendo quel primo termine esprimersi per $q^0$, ne dinoterà che in quella, qualunque sia la $q$, che potrà dirsi *base* della progressione, l' esponente di questa, perchè quel termine pareggi 1, debba esser *zero*, come per altro era già noto (32.). E vedesi che in essa gli esponenti de' termini in progressione geometrica sieno la progressione aritmetica de' numeri naturali.

490. DEF. XXVI. Or questi esponenti son detti *logaritmi* di que' termini che affettano, ne' quali la $q$ prende il nome di *base logaritmica*, che potendo ad arbitrio variare, varierà conseguentemente il sistema logaritmico.

Adunque potrà stabilirsi, che:

491. DEF. XXVII. In un sistema logaritmico della base $q$, i logaritmi de' numeri che sono potenze di questa base sono gli esponenti di esse; e però il *zero* di $q^0$ ossia di 1; l' 1 di $q$, il 2 di $q^2$, il 3 di $q^3$ . . . l' $h$ di $q^h$, il $k$ di $q^k$, *ec.*

492. Dalle precedenti considerazioni si rileva essere

$$log. \frac{q^0}{q} = log. q^{-1} = -1$$

$$log. \frac{q^0}{q^2} = log. q^{-2} = -2$$

$$log.\ \frac{q^0}{q^3} = log.\ q^{-3} = -\ 3$$

$$log.\ \frac{q^0}{q^4} = log.\ q^{-4} = -\ 4$$

. . . . . . . . . . . . .

$$log.\ \frac{q^0}{q^n} = log.\ q^{-n} = -\ n$$

Cioè, che: *i log-mi*[52] *delle frazioni, che costituiscono la serie geometrica inversa della proposta*,

$$1\ ,\ \frac{1}{q}\ ,\ \frac{1}{q^2}\ ,\ \frac{1}{q^3}\ ,\ \frac{1}{q^4}\ .\ .\ .\ .\ .\ \frac{1}{q^n}$$

*sono quelli stessi de' loro denominatori presi negativamente.*

493. Or se tra 1 e $q$ s'inserisse un numero $m$ di medii geometricamente proporzionali si verrebbe a stabilire una nuova serie geometrica di $m + 2$ termini, il primo de' quali sarebbe 1, e l'ultimo $q$, gli esponenti de' cui termini ne costituirebbero un' altra in progressione aritmetica, e però sarebbero i *log-mi* corrispondenti a' termini di essa (489, e 490.). E tra questi è facile comprendere, che acerescendosi grandemente il numero di tali medii proporzionali geometrici, vi si debbano comprendere prossimamente i numeri della progressione naturale tra 1 e $q$, $q$ e $q^2$, *ec.* de' quali ne sarebbero logaritmi rispettivi i corrispondenti termini della progressione aritmetica nascente dall' inserire tra 0 ed 1, 1 e 2, *ec.* un numero di medii aritmeticamente proporzionali pari a quello de' primi.

494. Fu questo di fatti il fondamento della costruzione delle tavole logaritmiche per coloro che primi se ne occuparono, esibendole per la base $q = 10$, che furon detti *volgari*, o *tabulari*[53]. Ma posteriormente essendo stati da' moderni

[52] È in questo modo, ed ancora nell' altro *log.*, che si costuma abbreviare le voce *logaritmo.*

[53] Essi sono ancor detti *Briggiani*, da Errico Brigg, che il primo

analisti prodotti de' metodi assai più generali ed attivi fondati sull' equazione $y = q^x$ ( $y$ rappresenta il numero , $q$ la base logaritmica, ed $x$ il *log-mo* di quello ) noi tralasceremo di quì occuparci di quell' antico modo , riserbandoci ad esporre estesamente questo secondo nel luogo suo proprio del vol. II. del presente *Corso* , stimando sufficiente per ora la nozione preliminare già data de' *logaritmi* , e quello che passeremo ad esporre per le abbreviazioni ch' essi prestano al calcolo aritmetico , facendone una qualche applicazione ; e mostrando eziandio l' uso necessario di essi nel maneggio di alcune algebriche equazioni. Sicchè per ora supporremo tali *tavole* come già costruite , e noto il modo di usarne ne' diversi rincontri , che ben può rilevarsi dalle esposizioni premessevi dagli autori di esse , o ancora apprenderlo con l' uso in maneggiarle.

495. In queste *tavole* il logaritmo dell' unità essendo *zero*, ed 1 quello del 10, 2 quello del 100, 3 del 1000 , *ec.* il log-mo di un numero tra l' 1 e 'l 10 dovrà esser dinotato da un fratto vero ; quelli de' numeri tra 10 e 100 , da 1 più un fratto vero; così gli altri da 100 a 1000 da 2 con un fratto vero ; e similmente in appresso. Di tal che le unità del numero intero saranno quanto i *zeri* del numero della progression decupla , d' onde comincia il nuovo periodo aritmetico nel quale trovasi compreso il numero proposto; o pur quanto il numero delle cifre del numero proposto meno 1.

---

calcolò le tavole per tal sistema , con 14 decimali , da 1 a 20000 , e poi ripigliandole da 90000 a 100000,che vennero pubblicate in Londra, con l'epigrafe di *Arithmetica logarithmica* ; e di poi Adriano Wlacq supplendo quelli pe' numeri tralasciati , le riprodusse con soli 10 decimali , imprimendole col titolo di *Trigonometria artificialis*. E da queste per più tempo furono estratte quelle manuali , che dallo stesso Wlacq, e da altri ne furono pubblicate , finchè usando de' nuovi metodi , non fosse riescito più agevole di perfezionarle ed estenderle, essendosi così avute quelle del Gardiner da 1 a 102000 , del Callet da 1 a 102960 , dell' Hutton da 1 a 100000 , del Babbege da 1 a 108000, *ec.*

496. Def. xxviii. Quel numero intero ch' entra a parte di un logaritmo dicesi *caratteristica* di esso, e 'l fratto aggiunto si dice *mantissa*, che val parte additizia.

497. Laonde la caratteristica de' numeri tra 1 e 10 è il *zero*; l' unità è quella de' numeri tra il 10 e 'l 100, il 2 l' altra di quelli tra il 100 e 'l 1000; e così in appresso. Ed ottenuti i logaritmi di tutti questi numeri si avranno ancora quelli de' loro inversi, cioè de' fratti che gli abbiano per denominatori, avendo per numeratori l' 1, prendendoli negativamente (492.). E però la caratteristica de' numeri tra 1 ed $\frac{1}{10}$ sarà $-1$; quelli degli altri tra 1 ed $\frac{1}{100}$ sarà $-2$, e $-3$ l'altra di quelli tra 1 ed $\frac{1}{1000}$, ec.

498. Or poichè

$$q^h \times q^k = q^{h+k} \quad \text{sarà} \quad log. q^h \times q^k = h + k$$
$$\frac{q^k}{q^h} = q^{k-h} \quad \ldots \quad log. \frac{q^k}{q^h} = k - h$$
$$(q^k)^m = q^{mk} \quad \ldots \quad log. (q^k)^m = mk$$
$$\sqrt[m]{q^k} = q^{\frac{k}{m}} \quad \ldots \quad log. \sqrt[m]{q^k} = \frac{k}{m}$$

Laonde: *il log-mo del prodotto risulta dalla somma de' log-mi de' fattori, e quello del quoziente dalla differenza de' log-mi del dividendo e del divisore.* In oltre, *il logaritmo della potenza è quanto quello della base moltiplicato per l' indice di tal potenza; come ancora il log-mo della radice è quanto l' indice della potenza diviso per quello della radice da estrarsi.*

499. Da che comincia a vedersi l'uso vantaggioso che può farsi de' logaritmi nelle operazioni aritmetiche fondate su lunghe moltiplicazioni, o divisioni, e per le elevazioni a potenze, o estrazioni di radici di alto grado.

500. Or le mantisse de' logaritmi essendo frazioni, vengono espresse convenevolmente in decimali di 5, 6, 7, o più

cifre , secondo la maggiore approssimazione che si vuol dare alle *tavole* . Quindi la caratteristica 1 del logaritmo della base 10 , e di ciascun altro numero della progressione decupla vien seguita da 5, 6, 7 ... *zeri*[54]. E siccome una tal caratteristica non si cambia , che al cambiar la cifra del periodo aritmetico da 1 a 10, da 10 a 100, da 100 a 1000, *ec.*, così in alcune *tavole* suole tralasciarsi, notandovi la sola mantissa ; per la quale, poichè le tre prime cifre pe' numeri successivi interi non cambiansi che di tratto in tratto, hanno però taluni più recenti costruttori di *tavole* introdotto il costume di non notarle che dove un tal cambiamento ha luogo ; sicchè per compiere la mantissa , ove manchino , bisogna supplirvi le tre prime cifre dalla più prossima ove si trovano.

501. E poichè , la moltiplicazione di un numero per 10 , 100, 1000 , *ec.* non fa altro che accrescere la caratteristica del suo *log-mo* di 1 , 2 , 3 , *ec.* senza alterare la mantissa ; si vede però , che i numeri composti dalla stessa cifra con *zeri* in fine dell' un di essi , che ne variano però il valore al decuplo , centuplo , *ec.* debbano avere la stessa mantissa.

502. In oltre, poichè i log-mi de' numeri interi tra 1 e 10, cioè gl' indici corrispondenti alla base 10 per rappresentar tali numeri, debbono costituire una progressione aritmetica , e lo stesso per gli altri de' numeri da 11 a 99 , da 101 a 999 , *ec.* , si vede però, che essendo più estesi i termini di tal progressione a misura che cresce il grado del periodo aritmetico in cui sono compresi , debba la differenza , o ragione della progressione andar sempre minorando ; di tal che i logaritmi de' numeri prossimi l' un l' altro si minorino in differenza , a misura che si aumenta la grandezza di essi numeri ; e però debba esser maggiore la differenza tra *log.* 3 e *log.*4 , che tra *log.*103 e *log.* 104 ; e questa ancor maggio-

[54] Essendo esse calcolate con un numero di decimali maggiore di quelli che vi si è poi ritenuto, possono considerarsi esatte fino a questo grado decimale, valutando l'errore al più dalla cifra decimale seguente.

re dell' altra tra *log*.1003 e *log*.1004 ; e così in appresso. Quindi crescendo di molto il periodo in cui sieno compresi due numeri successivi, particolarmente per quelli oltre i 100000, dove giunge la maggior parte delle più accurate *tavole*, la differenza de' loro logaritmi debba diventar piccolissima [55].

503. Su questo principio è fondata la ricerca di un logaritmo che non si rinvenga precisamente nelle *tavole*, e del problema inverso; come può vedersi e nelle spiegazioni messe in principio di queste [56], e ne' trattatini di logaritmi che trovansi in alcune *Aritmetiche*.

504. Deesi pure avvertire, per l' intelligenza delle calcolazioni per logaritmi eseguite in opere de' moderni, essersi introdotto l' uso, a fin di evitare la caratteristica negativa de' numeri frazionarii, di accrescerla di 10 ; il che non obbliga ad altro se non se alla fine del calcolo di minorare la caratteristica del risultamento, che si troverà molto grande, di tante volte il 10, per quanti saranno stati i log-mi di quantità frazionarie che in esso entravano ; e ritrovar poi il numero corrispondente alla caratteristica così ridotta.

505. Def. xxix. Questa differenza del *log-mo* di un numero dal 10 è ciò che dicesi *complemento aritmetico*.

506. E poichè nel sottrarre il log-mo di un numero dal 10, con tanti *zeri* quanti ne ha la mantissa del log-mo, si viene a sottrarre la prima cifra di questa dal 10, e poi ciascun' altra dal 9 ; perciò un tal complemento si può ottenere con facilità cominciando a sottrarre la caratteristica del log mo dal 9, e successivamente anche dal 9 ciascuna cifra della mantissa, fino all' ultima che si sottrarrà dal 10 : avvertendo che

[55] Ciò verrà dimostrato ancora nel trattar generalmente de' *log-mi* nel vol. II ; e può anche verificarsi col prendere tali differenze nelle *tavole*.

[56] Si potrà riscontrare specialmente quella premessa alla edizione delle *tavole* del Gardiner fatta in Firenze da' PP. scolopii Canovai, e del Ricco.

se in fine di questa vi fossero de' *zeri*, si deve prendere per ultima cifra quella che precede i *zeri*. E questa operazione, come vedesi, si può facilmente eseguire sulle stesse tavole, senza aver bisogno di scrivere i due numeri per sottrarre l'uno dall' altro.

Così volendo il complemento aritmetico del log-mo di 150, ch' è 2,1760913, cominciando a sottrarre tutte le cifre, dal 2 fino all' 1, dal 9, e 'l 3 dal 10, esso sarà 7,8239087.

507. Si ha dall' uso del complemento aritmetico l' altro vantaggio di cambiare la sottrazione de' log mi in somma. Imperocchè chi dovendo sottrarre da un logaritmo un altro, vi aggiugnesse in vece il complemento aritmetico di questo, si troverebbe avere nel tempo stesso sottratto dal primo logaritmo il secondo, ed accresciuta di 10 la sua caratteristica; e però non dovrebbe far altro, per ottenere l' effettiva differenza di que' logaritmi, che cancellare la prima cifra a sinistra nella somma avuta.

Così, poichè volendo dividere il numero 155 per 5, bisogna dal log-mo del 155 sottrarre quello del 5, per avere il log-mo del quoziente 31; si otterrà questo in altro modo sommando a 2,1903317 *log-mo di 155*

9,3010300 *compl.arit. di log.5*

e cancellando in tal somma

11,4913017

la prima cifra 1 a sinistra, sicchè diverrà

1,4913617 *log-mo di 31 quoz.di 155 per 5.*

508. Or impiegando i complementi aritmetici de' logaritmi, e non valutando i risultamenti che hanno luogo nel calcolo, che al termine assoluto di esso, spesse volte avviene, che l' ultimo risultamento sia tale, che la caratteristica dell' ultimo logaritmo trovisi sì forte, da potersi ottenere la diminuzione di essa di tante volte 10, per quanti complementi aritmetici di logaritmo si sono introdotti nel calcolo. Ma se ciò non avvenga, e che in fine si trovi tal caratteristi-

ca, che non sia suscettiva della diminuzione indicata; in tal caso è manifesto, che quest' ultimo risultamento corrisponda ad una frazione: e per ritrovare qual sia, bisognerà o eseguire la diminuzione nella caratteristica, e poi valutare il fratto corrispondente al risultante logaritmo negativo, o pure procedere come nel seguente esempio.

509. Suppongasi che da un' operazione ove siasi introdotto un solo complemento aritmetico siane risultato il logaritmo 8,7322350: è chiaro, che essendo la caratteristica di questo minore di 10, quel risultamento cui esso corrisponde debba essere un fratto, il cui logaritmo dovrà esser quanto il dato meno 10, cioè meno il logaritmo di 10000000000. Ma il logaritmo dato meno quello di 10000000000 è quanto il logaritmo del fratto che ha per numeratore il numero corrispondente al logaritmo dato, e per denominatore il 10000000000. Adunque sarà questo il fratto cercato. Che perciò la regola per facilmente ottenerlo sarà quella di cercare il numero corrispondente al logaritmo dato, considerato come logaritmo di numero intero, e segnare in esso dieci cifre decimali. Vale a dire, che essendo quel numero 539802800, il fratto cercato sarà espresso da 0,0539802500.

510. E se il calcolo non esiga grandissima approssimazione, com' è d' ordinario, allora basterà minorare la caratteristica di tante unità di quante bisogna, perchè cominci a ritrovarsi nelle tavole; e tante cifre decimali di meno segnare nel numero che le corrisponderà in queste. Imperocchè è chiaro, che così facendo siasi venuto a dividere il numeratore e 'l denominatore del fratto decimale richiesto, per lo stesso numero della progressione decupla; se non che il numero ottenuto per numeratore siasi ottenuto con minore esattezza di quello che si sarebbe avuto conservandovi la sua caratteristica, e determinandolo col metodo che sta accennato nel §.503. Così nel caso precedente minorandosi la caratteristica del logaritmo dato di 5 unità, esso sarebbesi ridotto a 3,7322350,

il quale corrisponde nelle *tavole* al numero 5398,in cui segnando solamente 5 cifre, per le 5 unità di cui si è minorata la caratteristica,si avrebbe il fratto cercato espresso in decimali.

511. Dee pure avvertirsi, al proposito della maniera di usare del complemento aritmetico, che se mai la quantità alla quale corrisponde un logaritmo risultato da un calcolo, ove siensi introdotti uno o più complementi aritmetici, si elevi a potenza; in tal caso dovendosi quel tal logaritmo moltiplicare per l'indice della potenza, si troverà la nuova caratteristica tanto superiore alla vera, per quanto ne dinota il prodotto 10 per lo numero de' complementi aritmetici introdotti nel calcolo, e per l' indice della potenza. Così, per esempio, se era un solo il complemento aritmetico introdotto nel calcolo, e che la quantità corrispondente al risultamento logaritmico ottenuto si fosse supposta elevarsi a cubo, si avrebbe una caratteristica $10 \times 3$ più forte della vera. E similmente si vedrà che nell' assegnare in casi simili al poc' anzi descritto il logaritmo della radice, la caratteristica di questo si trovi essere più forte della vera di quanto ne dinota il 10 moltiplicato pel numero de' complementi aritmetici introdotti nel calcolo, e diviso per l' indice della radice.

512. Prima di lasciar le teoriche di questo capitolo noteremo, che per costruir le tavole logaritmiche non sia stato necessario assegnare quelli di tutt' i numeri, dall' 1 fino al grado cui giungono le *tavole*; ma solamente quelli de' numeri *primi*: poichè gli altri risultando dal prodotto di questi, o da loro potenze, facilmente se ne otteneva il log-mo, sommando quelli de' loro fattori, e prendendo il log-mo della radice tante volte quante l'indice della potenza ne dinotava. Così

$$log.\ 35 = log.7 + log.5$$
$$log.105 = log.3 + log.5 + log.7$$
$$log.\ 25 = log.5^2 = 2log.5$$
$$log.125 = log.5^3 = 3log.5$$

. . . . . . . . .

*Usi del calcolo logaritmico nella comune Aritmetica.*

513. Questi usi sono abbastanza indicati dal §.498, vale a dire che i log-mi possonsi convenevolmente adoperare in tutte le operazioni ove richiedesi *moltiplicazioni*, e *divisioni*, *elevazioni a potenze*, o *estrazioni di radici*.

Così : *il quarto proporzionale in ordine a tre numeri dati si troverà sommando i log-mi del secondo e del terzo, e sottraendone quello del 1°; un tal residuo sarà il logaritmo del numero cercato*; il quale apparirà dalle *tavole*, o per mezzo di esse si potrà ritrovare.

*Il log-mo del terzo proporzionale si otterrà raddoppiando il log-mo del 2° termine, e sottraendone quello del primo.*

E : *quello del medio proporzionale si avrà sommando i log-mi de' termini dati, e prendendone la metà.*

514. In oltre : *Una potenza molto grande di un numero si otterrà più facilmente, senza eseguire le successive moltiplicazioni, e senza ricorrere alla formola del Newton, con assegnarne per logaritmo quello della radice data moltiplicato per l' indice della potenza.* Ed è per tal modo, che si è ottenuto il numero corrispondente a $2^{64} - 1$, espressione risultata dal problema II. (488.). Imperocchè

$$log.2^{64} = 64\ log.2 = 64 \times 0,3010300 = 19,2659200$$

in cui la caratteristica 19 già indica dovervi corrispondere un numero di 20 cifre (495.), come quello ivi assegnato per mezzo delle *tavole*.

515. Così pure volendo estrarre la radice dodicesima dalla potenza 7 di 2.

Essendo $\sqrt[12]{2^7} = 2^{\frac{7}{12}}$, sarà $log.\sqrt[12]{2^7} = log.\,2^{\frac{7}{12}} = \frac{7}{12}log.2$

$$= \frac{7.log.2}{12} = \frac{2,1072100}{12} = 0,1756008\ ,$$

il qual *log-mo* trovandosi corrispondere ad 1,49837, sarebbe questa la radice richiesta.

*Usi di un tal calcolo nel maneggio di alcune equazioni.*

516. Quì non faremo altro, che indicare il modo da risolvere per mezzo de' log-mi le equazioni V, VIII, XII, e XVI del §. 484, come indicammo nella noterella 47.

1. L' equazione V. $q^{n-1} = \frac{t}{a}$

dà, passando da numeri a' log-mi

$$(n-1)\,log.q = log.t - log.a$$

e però $$n-1 = \frac{log.t - log.a}{log.q}$$

ed $$n = \frac{log.t - log.a}{log.q} + 1$$

2. Per l' equazione VIII.

$$aq^n = (q-1)s + a$$

si ha $$log.a + n\,log.q = log.[\,(q-1)s + a\,]$$

e quindi $$n = \frac{log.[\,(q-1)s + a\,] - log.a}{log.q}$$

3. Per l' equazione XII.

$$[\,qt - (q-1)s\,]\,q^{n-1} = t$$

si ha $$log.[qt-(q-1)s] + (n-1)\,log.q = log.t$$

ed $$n-1 = \frac{log.t - log.[\,qt-(q-1)s\,]}{log.q}$$

ossia $$n = 1 + \frac{log.t - log.[\,qt-(q-1)s\,]}{log.q}$$

4. Per l' equazione XVI.

$$t(s-t)^{n-1} = a(s-a)^{n-1}$$

si ha

$$log.t + (n-1)\,log.(s-t) = log.a + (n-1)log.(s-a)$$

e però

$$(n-1)\,[\,log.(s-a) - log.(s-t)\,] = log.t - log.a$$

$$n-1 = \frac{log.t - log.a}{log.(s-a) - log.(s-t)}$$

ed $$n = \frac{log.t - log.a}{log.(s-a) - log.(s-t)} + 1$$

## CAPITOLO XVIII.

ESERCIZIO DI PROBLEMI LA CUI SOLUZIONE È FONDATA SULLE FORMOLE STABILITE NE' TRE PRECEDENTI CAPITOLI.

---

### PROBLEMA I.

517. *Un padre di famiglia cui nasce una figlia, vuol costituirle la dote impiegando per ogni anno, finchè la marita, 1 grano nel primo giorno dell' anno, 2 nel secondo, 3 nel terzo, e così continuando fino al dì 365° dell'anno. Egli la marita al terminare il 14° anno: si vuol conoscere la dote.*

*Soluzione.*

La formola II. $s = (a + t)\frac{n}{2}$ del §. 423

in cui $a = 1$, $t = 365$, $n = 365$, dà per la somma $s$ ammassata in un anno *duc.* 667.95; e però, per 14 anni, *duc.* 9351.30.

### PROBLEMA II.

518. *Un corpo cadendo liberamente dalla quiete percorre nel primo minuto secondo di tempo palmi 18,57 napoletani; nel secondo di tali minuti il triplo di pal. 18,57, il quintuplo nel terzo secondo, e così sempre continuando pe' successivi numeri caffi. Or esso ha impiegato a discendere fino al piano 7 secondi. Si dimanda l' intero spazio percorso.*

*Soluzione.*

La formola XV. $s = \frac{na + n(n-1)d}{2}$ del §.423

in cui $a = 18,57$, $n = 7$, $d = 2.18,57 = 37,14$ diviene

$$\tfrac{1}{2}(7 \times 18,57 + 7 \times 6 \times 37,14) = 844,935$$

ch' è l' altezza cercata.

### PROBLEMA III.

519. *Una data somma di denaro accrescendosi per un anno della sua parte m, divenga con questa un nuovo capitale, che si accresca per un altro anno della sua parte m, e così continui per un numero n di anni. Si vuole di essa il valore alla fine di questi.*

*Soluzione.*

Sia $a$ la somma proposta, che diverrà

*dopo il 1° anno* $a + \frac{a}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = a\left(\frac{m+1}{m}\right)$

*dopo il 2° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right) + \frac{a}{m}\left(\frac{m+1}{m}\right) = a\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$

*dopo il 3° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \frac{a}{m}\left(\frac{m+1}{m}\right) = a\left(\frac{m+1}{m}\right)^3$

*dopo il 4° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^3 + \frac{a}{m}\left(\frac{m+1}{m}\right) = a\left(\frac{m+1}{m}\right)^4$

E con questa legge continuando, essa

*dopo n anni* sarà . . . . . . . . . . $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$

520. Sia in un caso $a = 1000$ *duc.*, de' quali essendosene fatto l' impiego alla ragione del 5 per 100, cioè del ventesimo del capitale, sarà $m = 20$; e supposto $n = 100$ *anni*, la formola di sopra esposta diverrà

$$1000\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$$

da valutarla per logaritmi nel seguente modo

$$log.\,1000\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = log.\,1000 + 100\,(log.\,21 - log.\,20)$$

e presi $\quad log.\,21 = 1,3222193$

$\quad\quad\quad log.\,20 = 1,3010300$

sarà $\quad log.\,\frac{21}{20} = 0,0211893$

*che moltiplicato per* . . . . . . 100

da $\qquad 100\ log.\frac{21}{20} = 2,1189300$

ed aggiugnendo $\quad log.1000 = 3,0000000$

si ha il *log. del cap. cer.* $\quad = 5,1189300$

al quale corrisponde nelle *tavole* il numero 131501.

521. La formola $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$ contiene tre elementi, ciascun de' quali, dati gli altri due, può determinarsi con una condizione che vi si apponga. Così:

1°. *Volendo determinar dopo quanti anni una tal somma divenga del valore k, dovrà risolversi l'equazione*

$$a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n = k$$

per determinarvi la $n$, il che si ottiene per log-mi nel seguente modo

$$log.a + n\Big(log.(m+1) - log.m\Big) = log.k$$

ed $$n = \frac{log.k - log.a}{log.(m+1) - log.m}$$

che potranno i giovani esercitarsi in valutarla ne' casi particolari.

A questa formola riducesi la soluzione del

### Problema IV.

*Una popolazione a si accresca in ogni anno della sua parte m, si vuol sapere dopo quanti anni si troverà raddoppiata.*

2°. *Se vogliasi conoscere la somma da impiegare per un dato numero n di anni alla ragione data della parte m per 100.*

Dall' equazione

$$a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n = k$$

si avrà $$a = k\left(\frac{m}{m+1}\right)^n$$

che nel caso di $n$ molto grande, a voler facilitare il calcolo con l' uso de' log-mi, si avrà

$$log.a = log.k + n\left(log.\,m - log.(m+1)\right).$$

A questo caso corrisponde il seguente

PROBLEMA V.

422. *Un certo deve ricevere dopo n anni una somma k dal suo denaro impiegato ad interesse composto alla ragione della parte m di ogni 100 ducati per anno; ed avendo bisogno del denaro prontamente, il debitore glielo vuole pagare. Si cerca quanto gli debba dare, per la detrazione degl' interessi successivi negli anni n.*

Che rimane però risoluto con l' anzidetta formola.

Quindi se una tal somma $k$ fosse di 1000 *duc.* impiegati al 5 per 100, cioè ad $\frac{1}{20}$ del capitale, e però $m = 20$, da dovere scorrere ancora 5 anni per riceverla, volendola al momento, se ne avrà il valore dall' equazione

$$\begin{aligned} log.a &= log.1000 + 5\,(log.20 - log.21) \\ &= 3{,}000000000 \\ &\;\;- 0{,}105946495 \\ &= 2{,}894053505 \end{aligned}$$

dal qual log-mo si rileverà dalle *tavole* il numero 783,5, per la somma richiesta.

3°. *E volendo finalmente conoscere la ragione alla quale dovrebbe impiegarsi il denaro, perchè il capitale a divenisse k dopo un numero n di anni.*

Dall' equazione $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n = k$

si avrebbe $$m = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{k}{a}} - 1}$$

e valutata la $\sqrt[n]{\frac{k}{a}}$, ove convenga, per log-mi , si avrà il valore della $m$ .

Dipende da questa formola la soluzione del

### PROBLEMA VI.

*Ritrovare l' aumento annuo di una popolazione , che in $n$ anni si è raddoppiata.*

### PROBLEMA VII.

523. *Stando tutto come nel problema III. , si aggiunga inoltre in ciascun anno al capitale che vi corrisponde la somma $b$. Se ne cerca il valore dopo $n$ anni .*

### Soluzione.

Ripigliando la soluzione ivi data , ed aggiugnendovi la nuova condizione si vede , che il capitale diverrà

*dopo il 1° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right) + b$

*dopo il 2° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{m}\right) b + b$

*dopo il 3° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^3 + \left(\frac{m+1}{m}\right) b + \left(\frac{m+1}{m}\right) b + b$

*dopo il 4° anno* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^4 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^3 b + \left(\frac{m+b}{m}\right)^2 b + \frac{m+1}{m} b + b$

. . . . . . . . . . . . . . .

*dopo n anni* $a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n + \left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1} b + \left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-2} b + \ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{m+1}{m}\right) b + b$

la quale espressione dividesi in due parti, l'una identica a quella già ottenuta nel risolvere il problema III, che ne rappresenta il 1° termine, e l'altra, a cominciar dal 2° termine, l'è una progressione geometrica, la quale invertita ha per primo termine $b$, l'ultimo termine è $\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1} b$, e l'esponente è $\frac{m+1}{m}$; che però (usando la formola XVII. del §. 484) si ha la somma

$$s = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n b - b.$$

E però l'intera espressione di quel capitale sarebbe

$$a\left(\frac{m+1}{m}\right)^n + m\left(\frac{m+1}{m}\right)^n b - mb$$

$$= (a+mb)\left(\frac{m+1}{m}\right)^n - mb$$

il cui valore, ne' casi particolari, potrà calcolarsi per logaritmi, come si vede quì appresso.

524. Se il capitale $a$ fosse di *duc.* 1000, impiegato al 5 per 100 per 25 anni, sicchè sia $m = 20$, $n = 25$; e che la somma $b$ aggiunta annualmente fosse di *duc.* 100; il calcolo sarebbe il seguente

$$log.\frac{21}{20} = \quad 0{,}021189299$$

| | | |
|---|---|---|
| *che moltiplicato per* | . . . . . . . . . | 25 |
| dà | $25\ log.\frac{21}{20} =$ | 0,5297324760 |
| ed è | $log.(1000 + 20000) =$ | 3,4771213135 |
| | Somma $=$ | 4,0068537885 |

al qual log-mo corrisponde il numero 10159,1 *duc.* per prima parte del valore richiesto, dal quale dovendo sottrarsene $20 \times 200 = 2000$, si avrà per esso il valore 8159,1.

525. La formola del §. 522 può dar luogo agli stessi casi che per l'altra del probl. III. si sono considerati nel

§. 521 e che crediamo superfluo di esporre particolarmente, lasciando ciò ad esercizio de' giovani.

526. Se invece di aggiugnersi in ciascuno anno la somma $b$ al capitale, se ne fosse detratta, si vede dalla calcolazione ivi fatta, che la formola esprimente il capitale ridotto dopo $n$ anni sarebbe

$$(a - mb)\left(\frac{m-1}{m}\right)^n + mb$$

sulla quale possono farsi le stesse considerazioni indicate nel §. precedente.

E di essa si valuterà la prima parte con l' uso delle *tavole* nel caso di $n$ molto grande.

527. Se in ciascuno de' precedenti due problemi, e negli sviluppi di essi, mentre la ragion dell' impiego era ad anno, si avesse voluto il valor del capitale dopo mesi, o giorni; in tal caso in vece della $n$ basterà porre $\frac{1}{12}$ moltiplicato pel numero de' mesi, o pure $\frac{1}{365}$ moltiplicato per quello de' giorni

Così (*pel probl. III.*) essendo $a = 100000$ *duc.* impiegati al 20° del capitale per 8 giorni, la formola

$$a\left(\frac{m+1}{m}\right)^t \text{ diverrà } 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}}$$

ed il suo logaritmo sarà equivalente ad

$$\frac{8}{365}\left(\log. 21 - \log. 20\right) + \log. 100000$$

$$= \frac{8}{365}\left(0,0211895\right) + 5$$

$$= 5,0004644$$

al qual log-mo corrispondendo il numero 100107, da questo sottrattone il capitale 100000 rimarrebbe per interesse degli 8 giorni *duc.* 107.

## PROBLEMA VIII.

*Taluno dovendo conseguire, per un numero n di anni, la somma h in fin di ciascuno, vuol cederla, dando all' acquirente per frutto annuale la parte m del capitale. Si dimanda la somma che dovrà essergliene pagata all' istante.*

### *Soluzione.*

Poichè la somma annuale $h$ che gli veniva pagata dee risultar da capitale ed interesse, supposto che quella da doverglisi pagare all' istante per la corrispondente al 1° anno fosse $x$, si avrebbe

$$x+\frac{x}{m}=h, \text{ ed } x=\frac{mh}{m+1}=h\left(\frac{m}{m+1}\right)$$

Così chiamata $x'$ l' altra corrispondente *al 2° anno*,

si avrebbe $\qquad x' = h\left(\frac{m}{m+1}\right)^2$

*E pel 3° anno* $\qquad x'' = h\left(\frac{m}{m+1}\right)^3$

E procedende così innanzi per $n$ anni, si avrebbe *per l' n-esimo anno* $\qquad x'''\ldots = h\left(\frac{m}{m+2}\right)^n$

Adunque dovendosi la somma da sborzarsi all' istante comporre da tutte quelle che sono risultate per gli anni successivi, verrebbe però espressa da

$$h\left[\frac{m}{m+1}+\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+\left(\frac{m}{m+1}\right)^3+\cdots\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\right]$$

in cui la progressione geometrica ch' è nel vincolo pel numero XVII. §. 484 riducesi ad

$$\frac{m^2}{m+1}-m\left(\frac{m}{m+1}\right)^{n+1}$$

nella quale, se la $n$ sia molto grande, il secondo termine si valuterà per mezzo de' logaritmi. E moltiplicando il valore di quel binomio per $h$ si avrà la somma richiesta.

528. Supponendo $h = 100$, $n = 10$, $m = 20$, cioè la ragione dell' impiego del denaro da sborzarsi al 5 per 100, si avrebbe tal somma espressa da

$$100\left[\frac{400}{21} - 20\left(\frac{20}{21}\right)^{11}\right]$$

ove il secondo termine del vincolo avendo il suo logaritmo espresso da

$$log.20 + 11(log.20 - log.21)$$

$$= \begin{cases} \phantom{-}1,3010300 \\ -\ 0,2330823 \end{cases}$$

$$= \quad 1,0679477 = log.11,6934$$

che tolto da $\frac{400}{21}$ = . . . . . . 19,0476

dà . . . . . . . . . . . . . 7,3542

E però la somma richiestà è . , . 735,42

*Fine della parte I.*

# NOTE

ALL'

# ANALISI ALGEBRICA

DELLE

## QUANTITA' DETERMINATE.

528. Supponendo $h=100$, $n=10$, $m=20$, cioè la ragione dell' impiego del denaro da sborzarsi al 5 per 100, si avrebbe tal somma espressa da

$$100\left[\frac{400}{21}-20\left(\frac{20}{21}\right)^{11}\right]$$

ove il secondo termine del vincolo avendo il suo logaritmo espresso da

$$\begin{aligned} & log.20 + 11(log.20 - log.21) \\ = & \begin{cases} \phantom{-}1,3010300 \\ -0,2330823 \end{cases} \\ = & \quad 1,0679477 = log.11,6934 \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| che tolto da $\frac{400}{21}$ = . . . . . . | 19,0476 |
| dà . . . . . . . . . . . . | 7,3542 |
| E però la somma richiesta è . , . | 735,42 |

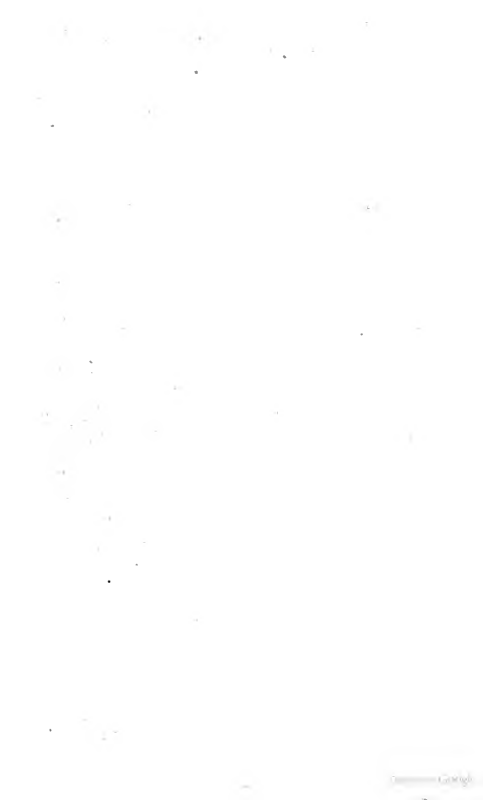
*Fine della parte I.*

# NOTE

ALL'

# ANALISI ALGEBRICA

DELLE

QUANTITA' DETERMINATE.

## ALLA PARTE I.

*Al* §. 25. — Questa nozione chiara delle quantità negative ci dispensa dal ricorrere all' idea di sito, che nelle quantità algebriche astrattamente considerate non deve aver luogo; che anzi una tale idea di opposizione di sito può essa dedursi dalla nozione da noi data della quantità negativa. Poichè è chiaro, che se il punto A scorra da A verso B,

B′ b′ A b c d B

per generar la retta AB, le parti A*b*, *bc*, *cd*. . . successivamente descritte dal punto A aggiugneranno continuamente alla grandezza della retta, e però saranno tante quantità *positive*. Sicchè, se descritta la retta AB il punto A ritorni indietro da B verso A, passando di nuovo per *d*, *c*, *b*, e però giugnendo in A, che val lo stesso di togliere dalla AB, le B*d*, B*c*, B*b*, BA; allorchè un tal punto sia giunto in A, se mai continuasse a scorrere direttamente verso B′, in senso opposto alla AB, pervenuto che sarà in *b*′, la A*b*′ venendo a rappresentare la differenza tra la retta AB, e l' altra B*b*′, che n' è maggiore, dovrà risultare negativa.

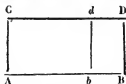
Il segno — dee dunque considerarsi come indicante operazione fatta sulla grandezza cui esso è prefisso, e non come integrante della medesima. E quindi si vede, che il segno negativo non debba alterare nessuna delle affezioni che dipendono da sola quantità; che però il rapporto tra $x$ e $-y$ sarà lo stesso che tra $x$ ed $y$, rimanendo ad $y$ il segno —, per dinotare la stessa opposizione, sia in operazione, sia in sito, che avevano da principio le quantità $x$, $y$.

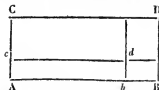
E dalla considerazione del segno — da noi data è facile ancora rilevare chiaramente, che nella moltiplicazione di una quantità negativa — A per una positiva + B, il prodotto debba risultar negativo. Imperocchè siccome l' idea aritmetica della moltiplicazione si è, che l' un de' fattori debba sommarsi tante volte, quante ne indica l' altro, si vede però, che debbasi il — A sommare per le unità che sono in B, e però risultar negativo.

*Alla nota n.* 7. — Siccome i primi algebristi italiani dissero *censo* il quadrato, così il *quadr.quadr.* venne detto *censo-censo*. Ed il *quadr.cubo*, o sia la quinta potenza il dissero *relato* 1°, denominando poi *censo-cubo*, o *cubo-censo* la sesta potenza, *relato* 2° la settima, *censo-censo-censo* l' ottava, *cubo-cubo* la nona: e così in seguito, come può vedersi nell' opera di fra Luca (*Summa de Aritmetica ec.*), che proseguo

tali denominazioni fino a potenza trentesima, o ancor presso Tartaglia, nel suo *general trattato di numeri e misure*. Le quali cose, come ancor altro simiglianti accenniamo per ispianare a' giovani l' intelligenza delle opere de' primi algebristi italiani, le quali al presente non si leggono, principalmente per la difficoltà d' intenderne il linguaggio; ond' è che facilmente si cade in equivoco di prendere per nuovo talune ricerche assai giudiziose, che a quelli si appartengono, o almeno che da essi hanno avuto principio.

*A' §§. dal 27 al 31.*—In questo modo sembrami essersi conseguito lo scopo di rendere alle quantità algebricamente considerate quella generalità di concetto, ed uniformità di natura che loro è propria, e che toglievasi ad esse con istituirvi sopra calcolazioni diverse, proponendovi regole speciali per ognuna di queste. Ed in oltre ricorrendo all' induzione per estendere alle esponenziali frazionarie la stessa regola che per le intere.

*Al §. 44.* — La Geometria può ad evidenza ridurre la regola qui indirettamente dimostrata per la moltiplicazione di — A per + B, e di — A per — B, nel seguente modo.

Dinotisi la quantità $a$ per la retta AB, e l' altra $b$ per la retta A$b$, come pure la $c$ per la AC, che suppongasi ad angolo retto con la AB, e compiansi i rettangoli AD, A$d$. Sarà $Ab = a - b$, ed il rettangolo A$d$ sarà rappresentato dal prodotto di $a - b$ per $c$ ( *Vedi nota in fine degli Elem. di Eucl.*). Ma un tal rettangolo è quanto l' altro AD, cioè, $a \times c$, toltone $b$D, cioè $b \times c$, e però quanto $a \times c - b \times c$. Adunque

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

Or sia AB $= a$, B$b = b$, e però A$b$ = AB — A$b$ $= a - b$. Parimen-

le AC $= c$, $Cc = d$, d' onde $Ac = c - d$. Laonde il prodotto $(a - b)\times(c - d)$ rappresenterà il rettangolo $Ad$, il quale è quanto l' altro AD meno lo gnomone $CdBD$. Ma il rettangolo $AD = AB\times AC = a\times c$, l' altro $bD = b\times c$, $cD = a\times d$; e questi due rettangoli $bD$, $cD$ superano lo gnomone $CdBD$ pel rettangolo $dD$, cioè per $bB\times Cc = b\times d$. Adunque se da $a\times c$ tolgasi $b\times c + a\times d$ si verrà a togliere dal rettangolo BC lo gnomone $CdBD$ più il rettangoletto $Dd$; che però ad ottenere $Ad$ dovrà a quella differenza aggiugnersi il rettangoletto $dD$, ossia $b\times d$. Laonde il prodotto di $a - b$ per $c - d$ verrà rappresentato da $a\times c - b\times c - a\times d + b\times d$. Da che vedesi dover il prodotto di $-b$ per $-d$ venir espresso $+ b\times d$ uniformemente alla regola stabilita pe' segni nella seconda parte del §. 44. E di questa intuitiva maniera di ciò dimostrare si valsero Diofanto, ed i primi analisti Italiani.

Una tal dimostrazione comprova nel tempo stesso, che il prodotto di $a \pm b$ per $c \pm d$ si abbia moltiplicando ciascun termine dell' un fattore per ciascuno dell' altro.

L' Algebra potendo ricevere dalla Geometria chiarimento in molte suo dottrine, come da' primi analisti Italiani, o dagli altri che calcarono le loro orme fino a tutto il secolo XVI. si vede fatto, non tralasceremo ancor noi di valercene a proposito; imitando anche il giudizioso analista Lhuilier, il quale fece lo stesso in fine de' suoi *Élémens d' Algèbre*, dolendosi che i matematici moderni avessero trascurata l' *applicazione della Geometria all' Algebra*. Ma queste doglianze del Lhuilier per verità non eran giuste che per taluni scrittori di Elementi, e non già per coloro da cui bisognava prender norma in ben comporli, tra' quali potrà bastare per tutti il sommo Lagrange, che ripetè spesso la massima de' vantaggi vicendevoli che la Geometria o l' Analisi algebrica possonsi prestare. E per non istar qui a riandare i tanti luoghi ove egli così la discorre, mi limiterò a recarne due, che considero più elementari, tratti dalle sue dotte lezioni che per poco tempo dettava nella *Scuole Normali di Parigi*, nell' un de' quali ci dice: » *Ce rapprochement de la Géométrie et de l'Algèbre répand un nouveau jour sur ces deux sciences; les operations intellectuelles de l' Analyse rendues sensibles par les images de la Géométrie, sont plus faciles à saisir, plus interessantes à suivre* ( Leçons vol. IV. pag. 244 ). « Nell' altro poi più analogo al caso presente, così esprimevasi « . *La méthode que je vous ai exposée dernierement, pour trouver et demontrer plusieurs propriétés generales des équations par la consideration des courbes qui les representent*, *est proprement une espèce d' application de la Géométrie à l'Algèbre*, ( vol. cit. pag. 401 ). — E qui conviene osservare che il Fergola aveva anzi in ciò abbondato in tutto il suo *Cor-*

*so di Analisi Algebrica*; e così sempre fu istituita la gioventù matematica nella sua scuola,

*Al* §. 76 — Una tal verità risulta anche dimostrata dalla 5ª, o dalla 6ª del libro II. di *Euclide*.

*Al* §. 98. — Perchè apparisca sott' occhi ciò ch' è detto nella conchiusione di questo § basterà ritornare dall' ultimo passaggio di esso al primo, da cho si avrà $R=R'Q''$, quindi $B=RQ'+R'=R'Q'Q''+R'$, ed $A=R'QQ'Q''+R'Q+R'Q''$. E si vede che le espressioni di A, B ridotte ne' loro fattori non abbiano altro divisore comune che $R'$.

*Al cap. VII*—Ciò che intorno alle frazioni continuo si è recato in questo capitolo è quanto bisogna per le applicazioni a farne in seguito nel presente trattato elementare: ma un tale argomento dovrà esser poi ripigliato e compiuto nel vol. II. trattandovi le ricerche sulle *Serie*.

*Al cap. IX.* — Crediamo che debba riuscire assai utile a' giovani analisti la maniera elementare come troveranno qui esposta la formola generale per l' elevazione del binomio ad una potenza indeterminata, sulla quale dovremo ancor ritornare nella continuazione del presente *Corso di Analisi algebrica*.

*Al* §. 183.—Il dotto analista *Guglielmo Libri*, che professando con decoro le Matematiche nell' Università di Parigi, ed in quell' Accademia, non ha dimenticato di essere italiano, ed ha anzi cercato di onorare questa sua nobilissima terra con un lavoro difficile e pieno di erudizione sulla *storia dell'Algebra in Italia* (che per esser conseguente a' suoi principii, e per uniformarsi al soggetto che trattava avrebbe dovuto scriverlo in nostra lingua) prolungando un poco le sue vedute, come suol succedere a chiunque s' investe di un assunto nazionale, ha creduto che la formola detta del *Newton* per elevare un binomio a potenza intera si appartenesse al Tartaglia, dalla cui opera quel sommo ingegno traendola, senza dirlo, avesse indotti gli analisti moderni ad attribuirgliela. Ancor io sono animato dallo stesso suo spirito italiano, e l'ho sempre dimostrato fin dalla prima mia età, nelle poche coserelle da me pubblicate; ma non vorrei che si stirachiasse poi tanto la cosa da pregiudicare ad una buona causa che noi abbiamo, e che tutta la gelosia delle altre nazioni, e specialmente della francese non ci potrà distruggere. Il Tartaglia, non v' ha dubbio, diede un modo ingegnoso per esibire la potenza intera di un binomio; ma questo fondavasi del tutto su i coefficienti della potenza di esso precedentemente ottenuta, nè potevasi col modo ch' egli assegna esibire la potenza $n$ di un binomio senza aver prima stabilita la $n-1$ del medesimo; sicchè per lui l' induzione procedeva sempre di grado in grado, nè poteva-

te $AC = c$, $Cc = d$, e però $Ac = c - d$. Il prodotto $(a-b)\times(c-d)$ rappresenterà $Ad$, il quale è quanto l'altro AD meno lo gnomone $CdB$. Ma $AD = AB\times AC = a\times c$, $bD = b\times c$, $cD = a\times d$, e questi due rettangoli $bD$, $cD$ superano lo gnomone $CdB$ pel rettangoletto $dD$, cioè $bB\times Cc = b\times d$. Adunque se da $a\times c$ tolgasi $b\times c + a\times d$ si verrà a togliere dal rettangolo BC lo gnomone $CdB$ più il rettangoletto $Bd$; e però perchè risulti $Ad$ dovrà a quella differenza aggiugnersi il rettangoletto $dD$, ossia $b\times d$. Laonde il prodotto di $a - b$ per $c - d$ sarà rappresentato da $a\times c - b\times c - a\times d + b\times d$; e quindi il prodotto di $- b$ per $- d$ sarà $+ b\times d$.

E di questa intuitiva maniera di ciò dimostraro si valsero Diofanto, ed i primi analisti italiani.

Una tal dimostrazione comprova nel tempo stesso, che il prodotto di $a \pm b$ per $c \pm d$ si abbia moltiplicando ciascun termine dell'un fattore, per ciascuno dell'altro.

L'Algebra potendo ricevere dalla Geometria chiarimento in molti suoi principii, come da' primi analisti italiani, e dagli altri che calcarono le loro orme fino a tutto il secolo XVI. si vede fatto, non tralasceremo ancor noi qui di valercene a proposito, imitando anche il giudizioso analista Lhuilier, il quale fece lo stesso in fine de' suoi *Elémens d'Algébre*, dolendosi che i matematici moderni avessero trascurata l'applicazione della Geometria all'Algebra.

*Al* §. *76.* — Una tal verità risulta anche dimostrata dalla 5ª, o dalla 6ª del lib. II. di *Euclide*.

*Al* §. *98.* — Perchè apparisca sott'occhio ciò ch' è detto nella conchiusione di questo §, basterà ritornare dall'ultimo passaggio di esso al primo, da che si avrà $R = R'Q''$, quindi $B = RQ' + R' = R'Q'Q'' + R'$, ed $A = R'QQ'Q'' + R'Q + R'Q''$. E si vede che le espressioni di A, B ridotte ne' loro fattori non abbiano altro divisore comune che $R'$.

*Al cap. VII.* — Ciò che intorno alle frazioni continue si è recato in questo capitolo è quanto bisogna per le applicazioni a farne in seguito nel presente trattato elementare: ma un tale argomento dovrà esser poi ripigliato e compiuto nel vol. II, trattandovi le ricerche sulle *Serie*.

*Al* §. *178* — Per dilucidazione del passaggio della formola per $m$ *elementi* a quella per $m + 1$ si osservi, che accrescendosi un *elemento*, questo potrà combinarsi, a ciascuna delle combinazioni o permutazioni

già ottenute, in $m+1$ modi; e però che le combinazioni con tutte quelle dovranno ancora risultare $m+1$. Laonde la formola

$$m(m-1)(m-2)\ldots.(m(m-1))$$

si cambia nell' altra

$$(m+1)m(m-1)\ldots((m+1)-m)$$

o sia in quella d' identica forma alla prima, cioè

$$m'(m'-1)(m'-2)\ldots.(m'-(m'-1))$$

Ed essendosi veduto che la prima delle formole esposte conveniva fino alle combinazioni e permutazioni quadernarie di quattro elementi, ben si rileva che da essa ne derivi la stessa pe' gradi successivi.

*Al cap. IX.* — Crediamo che debba riescire assai utile a' giovani analisti la maniera elementare come troveranno qui esposta la formola generale per l' elevazione del binomio ad una potenza indeterminata, sulla quale dovromo ancor ritornare nella continuazione del presente *Corso di Analisi algebrica.*

*Al* §. *183.* — Il dotto analista *Guglielmo Libri*, che professando con decoro le Matematiche nell'Università di Parigi, ed in quell' Accademia, non ha dimenticato di essere italiano, ed ha anzi cercato onorare questa sua regione nobilissima con un lavoro difficile e pieno di erudizione sulla storia dell'Algebra in *Italia* (che per esser conseguente a'suoi principii, ed all'oggetto avrebbe dovuto scriverlo in nostra lingua) prolungando un poco le sue vedute, come suol succedere a chiunque s' investe di un assunto nazionale, ha creduto che la formola detta del *Newton* per l'elevazione di un binomio a potenza intera si appartenesse al Tartaglia, dalla cui opera quel sommo ingegno traendola, senza dirlo, avesse indotti gli analisti moderni ad attribuirgliela. Ancor io sono animato dallo stesso suo spirito, e l' ho sempre dimostrato fin dalla prima età, nelle poche coserelle da me pubblicate; ma non vorrei che si stiracchiasse poi tanto da pregiudicare ad una buona causa che noi abbiamo, e che tutta la gelosia delle altre nazioni, e specialmente francese non ci potrà distruggere. Il Tartaglia, non v'; ha dubbio, diede un modo ingegnoso per esibire la potenza intera di un binomio; ma questo fondavasi del tutto su i coefficienti della potenza di esso precedentemente ottenuta, nè potevasi col modo ch' egli ne assegna esibire la potenza $n$ di un binomio senza aver prima stabilita la potenza $n-1$ del medesimo; sicchè per lui l' induzione procedeva sempre di grado in grado, nè poteva-

si da un certo segno cui erasi giunto spingere innanzi fino a quel grado che piacesse, trascurando tutti gli altri intermedi. (Veg. il cap. II. vol. I. del *general trattato de' numeri e misure*). E perchè del procedimento Tartagliano si abbia un'idea più chiara, l'indicheremo qui nel seguente modo:

*a* *c* *b*

*nu.* 1 1 *nu.*
*ce.* 1 2 1 *ce.*
*cu.* 1 3 3 1 *cu.*
*ce.ce.* 1 4 6 4 1 *ce.ce*
*rel.1°* 1 5 10 10 5 1 *rel.1°*
*ce.cu.* 1 6 15 20 15 6 1 *ce.cu.*
*rel.2°* 1 7 21 35 35 21 7 1 *rel.2°*
*ce.ce.ce.* 1 8 28 56 70 56 28 8 1 *ce.ce.ce.*
*cu.cu.* 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 *cu.cu.*
. . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . .

Egli rappresenta il binomio dato per le parti *ac*, *cb* della retta *acb*, a ciascuna delle quali suppone segnato il coefficiente 1 de' termini del binomio, indi sommando questi scrive il 2 al di sotto tra essi come coefficiente del 2° termine del quadrato, ponendovi fuori a sinistra e destra l' 1, 1 coefficienti del primo e terzo termine di tal potenza, ed accanto l'indicazione *ce.* (*censo*). In oltre sommando l'1 col 2, e 'l 2 con l' 1 ottiene 3, 3 coefficienti del secondo e terzo termine del cubo, che scrive in altra linea sottoposta a quella de' termini del quadrato, ponendovi al di fuori l' 1, 1 coefficienti dal primo e quarto termine, ed accanto l' indicazione *cu.* (*cubo*). Passa indi a sommare l'1 col 3, il 3 con l'altro 3, poi il 3 con l'1, ed ha i coefficienti del secondo terzo e quarto termine della quarta potenza, che scrive in altra linea sottoposta tra quelli del cubo, da' quali gli ha rispettivamente ottenuti, con porro fuori l' 1, 1 coefficienti dal primo ed ultimo termine di tal quarta potenza, indicandola accanto *ce-ce.* (*censo-censo*). E così continua fino alla potenza undecima, venendo per tal modo a rappresentare un triangolo equilatero diviso da linee trasversali parallele a' lati, di cui ciascuna di quelle parallela alla base contiene i coefficienti de' termini di ciascuna potenza, e quelle parallele a ciascun lato dinotano i coefficienti de' termini delle successive potenze, equidistanti dal primo od ultimo. E fa maraviglia che l' ingegno acuto e perspicace del Tartaglia non avesse ravvisato nella figura che rappresentava, che indicandovi il vertice ancor con 1, i coefficienti di ciascuna potenza dal secondo al penultimo si componevano dalla somma successiva di quelli de'

numeri della linea precedente fino a tal termine, cominciando sempre dall' 1. Sicchè il 2 coefficiente del secondo termine del quadrato nasceva dalla somma di 1, 1, primo e secondo della linea precedente, il 3 dalla somma di 1, 1, 1, del primo al terzo termine di tal linea, e così in seguito; e che così venivano a risultar essi i termini della progressione aritmetica de' numeri naturali, come egli pure ebbe avvertito. Similmente il coefficiente 3 del terzo termine del cubo, ch' è nella terza linea in secondo luogo, nasceva dal sommare i numeri 1, 2. primo e secondo della linea precedente; quello 6 del terzo termine della quarta potenza, dal sommare i primi tre della linea precedente; e così in appresso per essi, o pe' seguenti, come riesce facile a ciascuno il vedere. E da ciò avrebbe anche potuto il Tartaglia ravvisare, ch'essi coefficienti potevansi costituire dalla sola serie

1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 . . .

ch' è l' *ordinale* di 1° *ordine*, prendendovi la somma successiva dal primo termine in poi; avendosi per quella de' coefficienti del secondo termine la serie de' numeri naturali

1 ; 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 . . .

ch' è l' *ordinale* del 2° *ordine*.

Similmente dalla somma de' termini successivi di questa si avrebbero i coefficienti de' terzi termini delle potenze del binomio, rappresentati da' numeri *ordinali* di 3° *ordine*. E così in seguito. E forse, se egli avesse presa in questo modo la cosa avrebbe potuto essere più facilmente indotto ad assegnare una maniera generale da indicare i coefficienti di qualunque potenza de' termini di un binomio, partendo dall' indice di esso, come posteriormente fece il Newton, derivando tali coefficienti a dirittura dall' esponente stesso della potenza, ed in modo che per essa non fosse bisogno di alcun' altra potenza precedente. Ed una diversità marcata tra le due formole risultava evidentemente da che la prima procedeva da una somma continuata di coefficienti, l' altra ottiensi da un prodotto successivo degli esponenti. Nè perchè l' una può farsi rientrare nell' altra dee dirsi che l' una dall' altra dipenda: imperocchè è ben chiaro che così debba avvenire subito che l' una e l' altra esprimono il numero stesso. Convien dunque dire, che ben degno di lode era lo sforzo del Tartaglia in cercar una via da risparmiar la moltiplicazione successiva, per ottener la potenza di un binomio, ed ingegnosa assai era quella alla quale ci pervenne; ma che certamente non è da essa che il sommo Newton trasse quella assai più acconcia e generale, di cui gli analisti gli sono riconoscenti, intitolandola col suo nome; ne che possa però dirsi, che » l' on doit s' etenner que d' autres géomètres s' en soient attribué l' honneur «.

*Al* §.222.—Risolvere un problema non è altro, che rendere espliciti que' rapporti tra le note e le incognite di esso, che implicitamente conteneansi nelle condizioni assegnate dal proponente. E come che la convenevolezza di queste non può scorgersi che dall' intraprenderne l'analisi, o dal compimento di questa; non è però il proponente in colpa se il problema riesca impossibile, o abbisogni di convenevoli modificazioni per esser possibile; le quali cose spettano al risolvente, e costituiscono esse, in qualunque caso, la richiesta soluzione. Al qual proposito non fia superfluo recar quì la dottrina degli antichi pe' problemi geometrici, che vale egualmente per gli aritmetici, de' quali or trattiamo. *Colui che propone un problema, ancorchè non fosse istruito, anzi inabile del tutto, sebbene proponga ciò che in modo alcuno non possa costruirsi* (qui diremo *ritrovarsi*), *è degno di scusa, e senza colpa. Poichè spetta al risolvente il determinare ciò, ed indicar quello che può o non può farsi; e potendo farsi, quando, in qual modo, ed in quanti modi* (Pappo in princ. del lib. II. *Collect.*). La qual dottrina ho cercato illustrare nel presente libro, poichè su di essa vedeva incespicare non pur coloro che s'introducono alle Matematiche; ma ancora taluni loro istitutori, attribuendo poi insanamente a difetto di chi sa la loro ignoranza su tale assunto (che così ora se n'è introdotto il costume presso noi); di che n' è un chiaro argomento il terzo quesito del *programma* che fu proposto fin dal 1839, per vivificare lo spirito geometrico, e sul quale non essendo state sufficienti le illustrazioni date ripetutamente in diversi luoghi delle *Produzioni* relative ad esso pubblicate nel 1841, cercherò di nuovamente dichiararlo, per istruzione di coloro che le ignorano, nel presente libro, ne' trattati dell' *Invenzione geometrica*, e negli *Opuscoli* affini.

*A'* §§.*241 e 243.* — Oltre a' problemi *determinati*, ed *indeterminati*, ve n' ha a considerare ancora una terza specie opposta a questi, quando cioè il numero delle condizioni ecceda quello delle incognite, cioè che si abbiano più rapporti di quelli che occorrono perchè il problema sia determinato, e compiutamente risolubile. In questi casi, pel precetto stabilito nella precedente nota, spetta al risolvente l' assegnare la più che determinazione, vedere se le condizioni superflue sieno compatibili con le altre, da ridurre però il problema al numero competente di esse, da esser determinato, come in realtà l' era, difettando solo nella maniera com' era proposto; di che n' offre un esempio il problema risoluto nel §. 370; e talvolta ancora, se le condizioni eccedenti valgano a stabilire un tal rapporto tra' dati del problema da renderlo determinato ne' casi ne' quali quel rapporto abbia luogo;

come avverrebbe nell' anzidetto problema così generalmente proposto: *Determinar due numeri la somma de' quali sia a, il prodotto b, e sia la differenza de' loro quadrati*, le quali tre condizioni esposte algebricamente, e maneggiate darebbero luogo all'equazione di condizione tra quantità note $a^4 - c^2 = 4a^2b$
che verificandosi renderebbe il problema sempre possibile. Nè mancano *elementi* di Algebra ne' quali questi casi siene considerati.

Finalmente è notissimo, che il problema assolutamente più che determinato si scinda in più problemi determinati, staccandone di volta in volta le condizioni superflue, e combinandole tutte in que' diversi modi che n'è suscettivo il loro numero, e nella quantità necessaria a rendere determinato il problema. E dee però colui al quale vien proposto un simil problema scinderlo convenevolmente ne' parziali, e risolverne ciascuno.

Or sebbene non si fosse tralasciato d'illustrare le presenti dottrine, ne' luoghi indicati nella nota superiore; pure poichè è questa la prima opera elementare che pubblicasi dopo le impertinenti sciocchezze non ha guari puerilmente ripetute da coloro cui dispiacque la proposta del programma, per non potervisi convenevolmente misurare, non è fuori proposito di farne l'applicazione al problema geometrico che ne formava il *terzo quesito*.

Il problema era di: *Iscrivere in una piramide triangolare quattro sfere, che si toccassero tra loro e con le facce della piramide*. Or sebbene mi avessi data tutta la pena nelle *considerazioni*, che appena dato fuori il programma lessi alla R. A. delle Scienze di Napoli, e poi pubblicai per manifestare la natura, e la qualità di tal problema, pure, o che non bene mi s' intese, o che non fui letto, o che non mi si volle intendere, si sono continuati a propalare su tale assunto una quantità di errori, che potendo riescire di danno a' giovani inesperti, mi credo nell' obbligo di quì dileguaro.

Il proposto problema è *più che determinato*: ma ciò è ben diverso dal dirlo *impossibile* ( Ved. *Considerazioni generali sul programma*, a pag. 22 *e seg.* ); come da coloro in più di un luogo si è ripetuto. Poichè l' impossibilità è tutt' altra cosa, che può aver luogo ancora ne' problemi determinati, quando i dati siono ripugnanti a proprietà del soggetto; come chi dicesse di voler *dividere il numero 10 in due parti il cui prodotto fosse un numero maggiore di 25*, quadrato della metà del numero 10. Ma è da riflettersi, che quel problema sebbeno *più che determinato*, e che possa quindi scindersi in quattro determinati, che sono simili perfettamente tra loro, sicchè risolutone uno si hanno risoluti gli altri, ne mostra però ch'esso sia del genere di quelli che ammc·

tono una condizione tra' dati, perchè il problema diventi suscettivo di una compiuta soluzione nel modo com' è proposto. Di fatti nel caso presente ciascuno de' problemi determinati in cui quello scindesi sarebbe: *Iscrivere in tre angoli di una piramide triangolare data tre sfere, che si tocchino tra loro.* E come che gli angoli A, B, C, D della piramide combinati a tre a tre danno luogo a quattro combinazioni, si vede però che il problema si scinderebbe in quattro determinati. E questi essendo simili, cioè lo stesso problema variando semplicemente per un dato, ne mostrano, che il proposto in generale diverrà risolvibile con assegnare la condizione perchè l'un de' secondi problemi dia per due delle sfere le stesse che pel precedente risoluto, o sia assegnando a questo modo la specie della piramide.

È questa la riduzione del problema fattane dall' illustre geometra svizzero Steiner, che male intesa da persona inabile a comprendere il linguaggio di un buon geometra, di che costui spesso dolevasi quando n' era da quella importunato stando in Napoli, l'ha tratto in nuovi e più grossolani errori, o spinto malignamente a nuove impertinenze, pubblicate in un di que' nostri sciocchissimi fogli volanti periodici, che servon solo per procurare una penosa sussistenza a que' miserabili, che non hanno alcun mestiere. Ed io al contrario ne traggo argomento d' incoraggiare dopo ciò i giovani matematici, coltivatori di qualunque de' metodi, sia antico, sia moderno, a proseguire su queste basi la soluzione di sì difficil problema, che ha dato luogo a tante discussioni da cui sono venute fuori dottrine utili alla scienza, da comprovar sempre più la grave sentenza di Giov. Bernoulli, che: *Problemata proponere in publicum non caret utilitate; hac enim ratione excitantur et acuuntur ingenia, ac saepe aliquid eruitur in scientiae incrementum, quod alioquin absconditum mansisset* (Act. Lips. 1759.)

*A' §§. 254 e 255.* — Così pure l'equazione

$$x^4 - ax^3 + ex^3 - acx^2 - x^2 + bx - fx + bf = 0$$

ridotta nella forma

$$x^4 - (a - e)\, x^3 - acx^2 = x^2 - (b - f)\, x - bf$$

si scinde ne' fattori

$$\begin{array}{l} x^2 - ax = x - b \\ x^2 + cx = x + f \end{array} \quad \text{cioè} \quad \begin{array}{l} x^2 - (a + 1)\, x = - b \\ x^2 + (c - 1)\, x = + f \end{array}$$

che risolute separatamente daranno le radici della proposta.

Similmente l' altra equazione

$$x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$$

si scinde ne' fattori $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

e non già $-100 = o$, progredendo nell' operazione eliminando la $x$, si perverrebbe alle due equazioni in $y$, $z$

$$2y + 11\,z - 6 = o$$
$$2y + 11\,z - 10 = o$$

che sono contraddittorie ed assurde.

*A' §§. 329.* — Questa definizione da noi data della *determinazione* è compiuta, comprendendo essa sì quella che corrisponde a problemi *più che determinati*, che sieno però suscettivi di una *determinazione*, che a' problemi *determinati*, per vedere i casi in cui la loro soluzione sia possibile e impossibile.

*Al §. 338.* — Anche la radice del primo membro sarebbe $\pm x$; ma adoperando questo duplice segno, non si vorrebbe a far altro che a rinnovare le stesse radici di prima, che però esso diviene inutile. E la stessa considerazione vale anche per le equazioni affette del 2° grado.

*Al §. 340.* — La mancanza di un algorismo simbolico ne' primi tempi che cominciò ad esser l' Algebra coltivata, rendeva il cammino di essa assai lento ed inceppato, dovendo que' primi coltivatori di tale scienza condursi per vie tortuose, o per astrattissime considerazioni nelle ricerche le quali esigevano risultamenti generali; e gli Elementi di Euclide somministrarono loro spessissimo in ciò il mezzo da riescire.

L' analista arabo Mohamad ben-Musa, il cui trattato di *Algebra* conteneva lo scioglimento delle equazioni del secondo grado $x^2 + n = px$, lo fondò sul teorema 5 del lib. II. degli Elementi di Euclide, e Lionardo da Pisa servissi dello stesso mezzo, che rese più spedito, e che accrebbe della distinzione delle due soluzioni dal Mohamad non vedute, Ebbe dunque torto il Cardano di attribuirsi questo vanto, con dire, che non aveva Lionardo dimostrata se non una sola soluzione dell' equazione $x^2 + n = px$. e questa ancora in maniera oscura; che nè pure è vero. Nella quale falsa credenza, forse per essere stato alla fede del Cardano, cadde ancora il Montucla, il quale a dirittura asserì, che: *Cardan est le premier qui ait apperçu la multiplicité des valeurs de l' inconnue dans les équations* (a meno di escluder da ciò ch' ei dice quelle del secondo grado). Al qual proposito riflette bene il Cossali, che *il prender che fece Lionardo in doppio senso il radicale rispetto all' equazione $x^2 + n = px$ fosse un' avviamento a ritrovar le radici negative* (*Origine ec.* vol. I. cap. I § VIII.)

*Al* §. *370.* — L'impossibilità delle condizioni del presente problema dovea farsi rilevare da loro stesse. per principii già noti, e non già dedurla da' risultamenti immaginari cui si era pervenuto risolvendolo, come in casi simili suol farsi. E lo stesso procedimento si è pur tenuto in questo trattato di *Analisi algebrica* in altri simili rincontri.

*Al* §.*387.* — Queste equazioni sogliono ancor dirsi *del quarto grado derivative dal secondo.*

*Al cap. XIII.* (§§.*406-412*) — I primi analisti italiani, per compiere la soluzione delle *equazioni proporzionali* a quelle del secondo grado (*di* 4° *grado derivative dal* 2°) ricorsero ancor essi all' estrazione di radice da' binomi; ed il loro metodo geometrico ed assai elegante era il seguente. Stabiliti i tre teoremi:

I. *Il quadrato del binomio* $a \pm b$ è $a^2 \pm 2ab + b^2$ (4 e 7.El.II.)

II. *Dinotando* $a$, $b$ *due rette sarà* $a^2 + b^2 > 2ab$ (7. El. II.)

III. *Il prodotto de' quadrati di* $a$, $b$ *è uguale alla quarta parte del quadrato del doppio loro rettangolo*, cioè $a^2b^2 = \dfrac{(2ab)^2}{4}$.

Sia $M \pm N$ il binomio proposto, di cui almeno l'un de' termini N sia irrazionale, ed $M > N$; e la radico richiesta sia rappresentata da $a \pm b$, dovrà pel teor. II. essere $M = a^2 + b^2$, $N = 2ab$; e pel teor. III. dovrà essere $a^2 \times b^2 = \frac{1}{4}N^2$. Adunque la proposta ricerca vedesi ridotta a *dividere il termine maggiore M del binomio assegnato in due parti, il cui prodotto pareggi il quadrato della metà del termine minore N di tal binomio; saranno le radici di tali parti i termini della radice cercata del binomio*; la cui soluzione chiaramente comprendevasi nella prop. 5. El. II. Di fatti supposta la M divisa in due parti uguali, ed in due disuguali la cui differenza sia $z$ si avrà

$$z^2 = \tfrac{1}{4}M^2 - (\tfrac{1}{2}M + z)(\tfrac{1}{2}M - z) = \tfrac{1}{4}M^2 - \tfrac{1}{4}N^2$$

per la condizione del problema. Quindi

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - N^2)}$$

e però

$$\sqrt{(M \pm N)} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M + \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - N^2)}\right)} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{2}\sqrt{(M^2 - N^2)}\right)}$$

come risultava dalla regola al §.410.

*Al cap. XV.* (§§.*434-464.*) — Le ordinarie nozioni, che in talune istituzioni algebriche si danno de' numeri *poligoni*, distinguendoli ancora da' *figurati*, essendomi sembrato assai vaghe da indurre in equivo-

ci, ho stimato opportuno di definitivamente in questo capitolo stabilirle in modo distinto e regolare.

Su tali numeri compose Diofanto un libro ingegnosissimo, intitolandolo περι πολυγωνων αριθμων (*de numeris multangulis*) ove risolvè mirabilmente il doppio problema di: *assegnare dal lato il numero moltangolo, o da questo quello*, al che pervenne nella prop. 9, esponendo regole analoghe alle formole da noi ottenute con l'ajuto e le facilitazioni che offre il calcolo algebrico. Aggiunse ancora altre ricerche degne di considerazione, delle quali ci è sol pervenuta quella di *determinare in quanti modi un numero dato possa esser moltangolo*; e devo dolerci che il tempo edace ci abbia privati della continuazione di un tal libro, al che volendo supplire il dotto suo comentatore Bacheto due libri aggiunse di sua escogitazione. Sono degne anche di tutta la considerazione le dottrine che Diofanto premette sulle progressioni aritmetiche, circa il loro termine generale (*prop. 3.*), e 'l sommatorio (*prop. 4 e 5*); e ciò che più rileva ancora talune altre, che sembreran facili ed elementari con la nostra analisi simbolica, ma che destano alta maraviglia, so senza di questa riguardisi al modo come ei vi pervenne, e veggonsi dimostrate. Tali sarebbero, per indicarne alcuna, la prop. 2 ove dimostra, che: *In tre numeri aritmeticamente proporzionali, il prodotto dell'ottuplo del massimo nel medio, più il quadrato del minimo è uguale al quadrato della somma del massimo, e del doppio del medio.* In oltre, che: *In una progressione aritmetica che cominci da 1, la somma di n termini moltiplicata per l' ottuplo della differenza della progressione, più il quadrato di tal differenza minorato di 2 è un tal numero quadrato, la cui radice minorata di 2 risulta quanto n volte la differenza + 2.*

Ma ritornando a' numeri *poligoni*, bisogna osservare che i nostri primi analisti italiani Lionardo, *fra* Luca e Tartaglia non tralasciarono questo argomento, sul quale stabilirono ingegnose ricerche, e talune ancora assai difficili, delle quali non mancheremo di trattarne alcune nell' *Analisi algebrica delle quantità indeterminate*. Il nostro Maurolico ne fece pure l' oggetto delle sue acute speculazioni aritmetiche.

Intanto combinando il §. 463 con ciò che si è detto nella nota al §.183 risultano intuitivamente da' termini generali de' numeri *ordinali* degli ordini successivi, i coefficienti de' termini della potenza $n$ di un binomio; sicchè da quelli potevasi venire in cognizione di questi, o al contrario; e ciò come abbiamo in essa nota accennato, avrebbe ancor potuto ben rilevarlo il Tartaglia.

*Al cap. XVI.* . . . L' indicazione simbolica delle grandezze, che ne offre l' Algebra, essendo, come fu già detto nell' *introduzione*, comu-

ne alla quantità sì discreta, che continua, sebbene dia il vantaggio di sottoporre ancor questa ad una specie di calcolo, non dee però essa perder la sua natura, sicchè abbiasi come assolutamente ridotta a discreta; il che in molti casi è contraddittorio alla sua natura. Quindi la teorica fondamentale delle ragioni e proporzioni geometriche non doveva affatto scompagnarsi da quella che giudiziosamente ne offrì Euclide nel lib. V. degli *Elementi*; e però trattarla a dirittura, come alla sola quantità discreta appartenente. Ecco perchè ci siamo sempre a quel libro degli *Elementi* suddetti rivolti.

*Al* §. *488.* — A pag. IX. del *discorso preliminare* fu accennato del *gioco degli scacchi* inventato da Sessa figlio di Daher, e presentato ad un re indiano, per argomento che già presso questo popolo fosse ben avvanzata la teorica delle progressioni geometriche; e quivi nel presente §. vi è risoluto il problema per la determinazione di quel valore in grano ch'egli richiese a quel re in compenso della sua invenzione. La qual dimanda essendo sembrata al sovrano poco conveniente alla sua grandezza, dovè poi, in seguito del calcolo fattone, convenire dell'impossibilità di adempiervi, e rimanere quindi maggiormente maravigliato della dimanda apparentemente modesta fattagli dall'inventore di quel giuoco, che della giudiziosa invenzione del gioco stesso.

*A' cap. XVII. e XVIII.* — Quel tanto che si è qui recato de'logaritmi, corrispondente al nostro scopo indicato in fine del *discorso preliminare*, e bastante a prepararci la materia per trattar poi estesamente ed in modo più generale un tale argomento nel vol. II. del presente *Corso*. Ed il cap. XVIII. presenta pure a'giovani un sufficiente esercizio dell'uso de'logaritmi nella soluzione di problemi aritmetici; come d'altronde potranno essere istruiti del vantaggio de'medesimi nella Geometria esercitandosi in risolvere, col maneggio delle *tavole logaritmiche* do'numeri, e delle linee trigonometriche, gl'infiniti problemi che sul triangolo possonsi proporre, e con l'uso delle formole che la Trigonometria ne offre risolvere.